Universidad Técnica “Federico Santa María”
Departamento de Informática
Valparaíso

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 1 — Sa. 12.04.03, 12:00, C-201

Elija 5 problemas; cada uno vale 2 puntos. [1]

1. ¿Para qué valores de las constantes c y d la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix}$ tiene rango 2?

2. Determine el espacio nulo $N(A)$ y el espacio de filas $F(A)$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix}$.

3. Estudie el problema de diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Considere el operador de transposición T sobre el espacio $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de las matrices de 2×2 con cueficientes reales.
(a) ¿Es T una transformación lineal?
(b) ¿Se puede expresar el operador T mediante una matriz? En otras palabras, ¿existe una matriz M_T tal que $A^T = M_T A$ para toda matriz $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$?

5. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(v_1) = w_1 - 3w_3$, $T(v_2) = w_1 - 2w_2$, $T(v_3) = 2w_2 - 3w_3$. Determine la matriz A_T de la transformación T con respecto a las bases B_1 y B_2 de $\mathbb{R}^3$.

6. Como Ud. recordará la norma de Frobenius o de Hilbert-Schmidt de una matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, se define como $||A||_F = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$. Verifique que esta norma matricial posee la propiedad de la submutiplicatividad, i.e., $||AB||_F \leq ||A||_F \; ||B||_F$, $\forall A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$.

[s/n] Fuera de concurso. Tarea post-certamen. Controlable mediante Quiz. Sean E, F espacios vectoriales de dimensiones finitas n, m respectivamente sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $L(E, F)$ el conjunto de todas las aplicaciones (funciones) lineales $\phi : E \to F$.
(a) Defina una estructura de espacio vectorial sobre $L(E, F)$.
(b) Determine la dimensión de $L(E, F)$.

Notas “sine qua non”:
(a) Duración del examen: 90 minutos.
(b) El certamen debe ser resuelto individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble.*
(c) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 6 de abril de 2005