Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 2 — Vi. 9.05.03, 11:45, C-240 [1]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. (a) `[2 puntos]` Determine los valores singulares de A (ver (1) más arriba).
(b) `[2 puntos]` Determine los vectores singulares *derechos* de A, i.e., los vectores-columna de la matriz $\widehat{V}$ de la SVD *reducida* $\widehat{U}\Sigma\widehat{V}^*$ de A. Note bien que lo pedido son los vectores-columna de $\widehat{V}$ y no los de $\widehat{V}^*$.
(c) `[2 puntos]` Determine los vectores singulares *izquierdos* de A, i.e., los vectores-columna de la matriz $\widehat{U}$ de la SVD *reducida* $\widehat{U}\Sigma\widehat{V}^*$ de A.
(d) `[2 puntos]` Determine la SVD *completa* $U\Sigma V^*$ de A, i.e., aquella donde U es una matriz cuadrada.
(e) `[2 puntos]` Obtenga la forma polar de la matriz A, i.e., una factorización de la forma $A = PS$ donde P es una matriz cuadrada positiva semi-definida y S es una matriz con filas ortonormales (i.e., $SS^* = I$).

2. (a) `[2 puntos]` Obtenga la factorización QR *reducida* de B (ver (1) más arriba).
(b) `[2 puntos]` Obtenga la factorización QR *completa* de B.
(c) `[2 puntos]` Utilizando la factorización QR completa de B resuelva el sistema $B.x = b := [2, 0, -2, 1]^T$

3. Considere el espacio $\mathfrak{P}_4$ de los polinomios de de grado ≤ 4 en la variable real x, definidos sobre el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Considere también el subespacio E de $\mathfrak{P}_4$ generado por los monomios x^k, $k = 0, 1, 2$, definidos sobre $[-1, 1]$. Suponga que $\mathfrak{P}_4$ está equipado con el producto interno usual $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^* \, g(x) \, dx$, para todo $f, g \in \mathfrak{P}_4$, y la base constituída por los cuatro primeros polinomios de Legendre:

$$\begin{array}{lll} P_0(x) = 1\,, & P_1(x) = x\,, & P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1)\,, \\ P_3 = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x) & P_4(x) = \frac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3)\,. & \end{array}$$

(a) `[2 puntos]` Obtenga la matriz de proyección ortogonal de $\mathfrak{P}_4$ sobre el subespacio E.
(b) `[2 puntos]` Determine las proyecciones del polinomio $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ con respecto a la descomposición ortogonal $\mathfrak{P}_4 = E \oplus E^{\perp}$.

Notas "sine qua non":
(a) Duración del examen: 90 minutos.
(b) El certamen debe ser resuelto individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble.*
(c) Todo el certamen queda de tarea obligatoria para ser resuelta en grupos de seis (6) alumnos. La tarea incluye los programas de MATLAB que resuelven automáticamente, y de manera general, los problemas propuestos. Fecha de entrega: **Viernes 16.05.2003***, antes del mediodía. Esta tarea, especialmente la parte computacional, será controlada mediante "quizez" en ayudantía.*
(d) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 6 de abril de 2005

[1] Se ruega al lector estudioso que comunique al autor (`luis.salinas@inf.utfsm.cl`) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.