

Computación Científica I

Certamen N^o 3 — Sa.24.05.03, 10:00, C-225 ¹

1. Sea $Z = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

- (a) [2 Puntos] Compute la factorización QR de la matriz Z mediante el algoritmo de Householder.
(b) [1 Punto] Sobre la base de (a) obtenga ahora la factorización QR *reducida* de la matriz Z .

2. [2 Puntos] (a) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ y el vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine

el vector $b' \in \text{Range}(A)$ que mejor aproxima al vector b en el sentido del error cuadrático medio.

- (b) [2 Puntos] En el sentido de la norma L^2 sobre el intervalo $[1, 2] \subset \mathbb{R}$, ¿cuál es la mejor aproximación a la función $f(x) = x^{-1}$ que se puede lograr mediante una combinación lineal de las funciones e^x , $\sin x$ y $G(x) = 1 - x + x^2 - x^3$?

3. Considere la matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, el vector $b = [b_i]_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, la norma

vectorial $\|b\|_1 = \sum_{i=1}^4 |b_i|$, y la norma matricial $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq 4} \sum_{i=1}^4 |a_{ij}|$. Suponga que los coeficientes de A y de b experimentan una perturbación aleatoria de la forma $\rho e^{i\vartheta}$, donde $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$ y ϑ se distribuye uniformemente sobre $[0, 2\pi[$.

- (a) [2 Puntos] Determine el número de condición $\kappa(A)$ de la matriz A .
(b) [1 Punto] Determine la menor cota superior para $\|\delta b\|_1 / \|b\|_1$ en función de ρ .
(c) [1 Punto] Determine la menor cota (superior) posible para $\|\delta A\|_1 / \|A\|_1$ en función de ρ .
(d) [1 Punto] Considere el sistema $Ax = b$. Obtenga una cota (superior) para $\|\delta x\|_1 / \|x\|_1$ en función de ρ .
(e) [1 Punto] ¿Cuál es el menor valor de $\|\delta x\|_1 / \|x\|_1$ que Ud. puede garantizar cuando $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$?

Notas “sine qua non”:

- (a) Duración del examen: 90 minutos.
(b) El certamen debe ser resuelto individualmente con un bolígrafo de tinta indeleble.
(d) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 6 de abril de 2005

¹©Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 6 de abril de 2005. Se ruega al lector estudioso que comunique al autor (luis.salinas@inf.utfsm.cl) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.