

Computación Científica I

Certamen N^o 5 — Sa.03.07.03, 10:00 — C-226 ¹

1. El método de Householder para reducir una matriz $A \in M(m \times m, \mathbb{C})$ a una matriz de Hessenberg H queda resumido en el siguiente algoritmo (denominado algoritmo HH en lo que sigue):

```

1. for  $k = 1$  to  $m - 2$ 
2.    $x = A_{k+1:m,k}$ 
3.    $v_k = \text{sign}(x_1) \|x\|_2 e_1 + x$ 
4.    $v_k = v_k / \|v_k\|_2$ 
5.    $A_{k+1:m,k:m} = A_{k+1:m,k:m} - 2v_k (v_k^* A_{k+1:m,k:m})$ 
6.    $A_{1:m,k+1:m} = A_{1:m,k+1:m} - 2(A_{1:m,k+1:m} v_k) v_k^*$ 
    
```

Aquí hemos llamado H a la matriz que resulta de A al aplicar el algoritmo precedente.

- (a) ¿Cuál es la dimensión de de la matriz H ?
- (b) Si A es una matriz cualquiera, ¿qué forma tiene H ?
- (c) Si A es Hermitiana, ¿qué clase de matriz resulta H ?
- (d) Si A es real simétrica, ¿qué clase de matriz resulta H ?
- (e) ¿Por qué en la línea 2. del algoritmo precedente, inspirado en el método inventado por el Prof. Alston Householder (b. 5.May.1904, Rockford, Illinois, USA; d. 4.July.1993, Malibu, California, USA) aparece $x = A_{k+1:m,k}$ y no $x = A_{k:m,k}$ como parecería más natural?
- (f) ¿A qué corresponde x_1 en la línea 3. algoritmo HH? Más precisamente, si $k = 3$, ¿qué denota x_1 ?
- (g) ¿Qué papel cumplen las líneas 5. y 6. del algoritmo HH?
- (h) ¿Aparecen explícitamente reflectores de Householder en alguna fase del algoritmo precedente?

Si Q_k denota el reflector de Householder correspondiente a la k -ésima iteración del algoritmo HH,

- (i) ¿Cuál es la dimensión de la matriz que representa a Q_k ?
- (j) ¿Cómo queda definida algebraicamente la matriz de Q_k en términos de v_k ?
- (k) ¿Qué puede Ud. decir del producto $Q_k^* Q_k$?
- (l) ¿Qué puede Ud. decir del producto $Q_k Q_k^*$?
- (m) ¿Qué relación algebraica establece el algoritmo HH entre A , H y los reflectores Q_k ?
- (n) ¿Con qué algoritmo de determinación de los EW's se relaciona mayormente el algoritmo HH?
- (o) ¿Para qué y cómo se usa algoritmo HH en el contexto de los algoritmos de búsqueda de EW's?

2. El algoritmo denominado *iteración del cociente de Rayleigh*, denotado aquí por RQI, se resume frecuentemente del siguiente modo:

```

1.  $v^{(0)}$  = algún vector con  $\|v^{(0)}\|_2 = 1$ 
2.  $\lambda^{(0)}$  =  $(v^{(0)})^T A v^{(0)}$ 
3. for  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
4.   Resolver  $(A - \lambda^{(k-1)}I)w = v^{(k-1)}$  para  $w$       Aplicación de  $(A - \lambda^{(k-1)}I)^{-1}$ 
5.    $v^{(k)} = w / \|w\|_2$                                   Normalización
6.    $\lambda^{(k)} = (v^{(k)})^T A v^{(k)}$                       Cuociente de Rayleigh
    
```

Sea $\lambda \in \sigma(A)$ arbitrario, esto es su módulo no necesariamente es extremal. Naturalmente, λ es desconocido *a priori*, pero supongamos que disponemos de una aproximación decente $\lambda^{(0)}$ a su valor exacto mediante, por ejemplo, el teorema de Gerschgorin. Ahora queremos determinar λ , con una precisión dada, recurriendo a la iteración del cociente de Rayleigh.

¹©Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 6 de abril de 2005. Se ruega al lector estudioso que comunique al autor (luis.salinas@inf.utfsm.cl) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.

(a) ¿Cómo elegiría Ud. $v^{(0)}$ en la línea 1. del algoritmo RQI? La respuesta del *Prof. Dr. Pero Grullo*, “ $v^{(0)}$ se elige de modo que $(v^{(0)})^T A v^{(0)}$ resulte ser muy aproximadamente (ojalá igual a) $\lambda^{(0)}$ ” es, obviamente correcta (desde luego que no por la autoridad académica del Prof. Dr. Grullo). ¿Por qué, entonces?

(b) Evidentemente la respuesta del *Prof. Dr. Pero Grullo* es algo críptica (como ocurre a menudo con las respuestas de este Profesor). ¿Cómo se podría Ud. lograr *concretamente* el objetivo declarado por el Prof. Dr. Grullo?

(c) ¿Cómo varía $\lambda^{(k)}$ en función de k ? ¿Por qué y bajo qué hipótesis?

(d) ¿Con qué propósito aparece $\lambda^{(k-1)}$ en la línea 4. del algoritmo RQI?

(e) ¿Por qué no aparece $\lambda^{(k-1)}$ en la línea 6. del algoritmo RQI en circunstancias que sí aparece en la línea 4.?

(f) ¿Qué condición sobre $\lambda^{(0)}$ garantizaría la convergencia del algoritmo RQI?

(g) En el supuesto que el algoritmo RQI converge, ¿puede Ud. determinar $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)}$?

(h) En el supuesto que el algoritmo RQI converge, ¿puede Ud. determinar $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}$?

(i) Intente aplicar el algoritmo RQI a la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ partiendo de $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1]^T$.

¿Qué valor obtiene para el correspondiente EW?

3. La versión más básica del algoritmo QR (sin “shifts”) es absurdamente simple:

1.	$A^{(0)} = A$	
2.	for $k = 1, 2, 3, \dots$	
3.	$Q^{(k)} R^{(k)} = A^{(k-1)}$	Factorización QR de $A^{(k-1)}$
4.	$A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)}$	Multiplicación con los factores QR permutados

(a) ¿Cómo conviene que sea la matriz $A^{(0)}$ de la cual partimos?

(b) ¿Cómo se logra la forma apropiada en (a)?

(c) ¿No resultarán alterados los EW's de $A^{(0)}$ en ese proceso?

(d) ¿Cómo se modifican los EW's en las sucesivas iteraciones del algoritmo QR?

(e) ¿Qué ocurriría si se aplicara el algoritmo QR a una matriz ortogonal?

4. El algoritmo BPI de la *iteración simultánea* es todavía más simple que el algoritmo QR:

1.	$\hat{Q}^{(0)} \in M(m \times n, \mathbb{R})$	con columnas ortonormales
2.	for $k = 1, 2, 3, \dots$	
3.	$Z = A \hat{Q}^{(k-1)}$	
4.	$\hat{Q}^{(k)} \hat{R}^{(k)} = Z$	Factorización QR reducida de Z

La idea del algoritmo BPI es aplicar la iteración de potencias a varios vectores simultáneamente. Se desea determinar los EW's de una matriz *normal* (en este ejercicio) $A \in M(m \times m, \mathbb{R})$. Se supone que los EW's de A están ordenados de modo que: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_{n+2}| \geq \dots \geq |\lambda_m|$. Se parte de n vectores l.i. $v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$, se construye la matriz $V^{(0)} = [v_1^{(0)} | \dots | v_n^{(0)}] \in M(m \times n, \mathbb{C})$, $m > n$, y la sucesión de matrices $V^{(k)} = [Av_1^{(k-1)} | \dots | Av_n^{(k-1)}]$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) ¿Qué ocurre con las columnas de las matrices $V^{(k)}$ a medida que k crece?

(b) ¿Qué relación tiene la línea 4. del algoritmo BPI con la matriz $V^{(k)}$?

(c) ¿Altera la línea 4. el espacio de columnas de $V^{(k)}$?

Notas “sine qua non”: (a) Duración del examen: 100 minutos. (b) El certamen debe ser resuelto individualmente con un bolígrafo de tinta indeleble. (d) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 6 de abril de 2005