

## Computación Científica I Certamen N<sup>o</sup> 3 — Sa.29.05.04 <sup>1</sup>

1. Considere la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

- (a) Determine la factorización  $QR$  completa de la matriz  $A$  à la Gram-Schmidt.
- (b) Determine el proyector ortogonal  $P$  sobre el subespacio  $\text{Range}(A) = \text{Col}(A)$  de  $\mathbb{R}^5$ .
- (c) Determine la norma natural de  $Q$ .
- (d) ¿Se cumple  $\|A\|_F \leq \|Q\|_F \|R\|_F$ , donde  $\|\cdot\|_F$  denota la norma de Frobenius-Hilbert-Schur?

2. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica  $f(t)$ , constante por secciones, que puede ser descrita en un período mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 0,0 & \text{si } 0,0 \leq t < 0,2, \\ 2,0 & \text{si } 0,2 \leq t < 0,4, \\ 1,0 & \text{si } 0,4 \leq t < 0,6, \\ 1,5 & \text{si } 0,6 \leq t < 0,8, \\ 0,5 & \text{si } 0,8 \leq t < 1,0, \end{cases} \quad (1)$$

Para aproximar la señal  $f(t)$  en el intervalo  $[0, 1]$  se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma

$$p(t) = c_0 + c_1 \cos \pi t + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \cos 3\pi t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(a) Usando la factorización  $QR$  à la Householder, determine los coeficientes  $c_k$ ,  $k = 0 : 3$ , que minimizan el error cuadrático:

$$E_1 = \left( \sum_{j=0}^4 |f(0,10 + j 0,20) - p(0,10 + j 0,20)|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

(b) [Tarea para ser controlada en un “quiz” en la ayudantía más próxima]

Usando la factorización SVD, determine los coeficientes  $c_k$ ,  $k = 0 : 3$ , que minimizan el error cuadrático:

$$E_2 = \left( \int_0^1 |f(t) - p(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4)$$

(c) [Tarea para ser controlada en un “quiz” en la ayudantía más próxima]

Haga la sustitución  $t = \frac{1}{\pi} \arccos x$  en (2) y obtenga el polinomio algebraico correspondiente  $\tilde{p}(x)$ . Haciendo las adaptaciones que sean necesarias, resuelva los casos (a) y (b) del correspondiente problema de mínimos cuadrados. *Hint*: Quizas el glorioso nombre de Tschebyscheff (o Chebyshev) le recuerde algo!

### Notas “sine qua non”:

- (a) Duración del certamen: 90 minutos.
- (b) El certamen debe ser resuelto individualmente con un bolígrafo de tinta indeleble.
- (c) ¡Buena suerte!

---

<sup>1</sup>©Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 6 de abril de 2005. Se ruega al lector estudioso que comunique al autor ( [luis.salinas@inf.utfsm.cl](mailto:luis.salinas@inf.utfsm.cl) ) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.

LSC/lsc, 6 de abril de 2005