Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso

Computación Científica I
Certámenes Recuperativos — Viernes 01 de Julio de 2004 [1]

Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 1

1. (i) Sea T un tetraedro regular de lado a. Calcule la longitud de una altura de T. ¿Qué ángulo forman dos alturas cualesquiera de T?

(ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ dos vectores de norma unitaria y sea α el ángulo que subtienden. Demuestre o refute la relación: $\|x - y\| = 2|\sin(\alpha/2)|$.

2. Considere la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine los subespacios $N(A)$, Left$N(A)$, Row(A) y Column(A).

(b) Verifique explícitamente las relaciones de ortogonalidad que corresponda entre estos subespacios (considerando bases apropiadas).

Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 2

3. Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) ¿Cuáles son los proyectores ortogonales P y Q sobre Column$(A) \equiv$ Range(A) y Column$(B) \equiv$ Range(B), respectivamente, y cuáles son las imágenes del vector $(1, 2, 3)^*$ bajo P y Q?
(b) Determine s.c.P.L.P. factorizaciones QR reducidas y completas para A y B.

4. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$, donde $i^2 = -1$.

(a) Obtenga la SVD completa de A.

(b) Determine la imagen de la esfera unitaria $S := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \, : \, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ bajo la acción de la transformación lineal definida por la matriz A. Por favor, procure que su respuesta sea lo más cuantitativa posible.

(c) ¿Qué relaciones cuantitativas advierte Ud. entre las partes (a) y (b) de esta tarea?

Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 3

5. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Determine la factorización *QR completa* de la matriz A *à la Gram-Schmidt*.

(c) Determine la norma natural de Q.

(d) ¿Se cumple $\|A\|_F \leq \|Q\|_F \|R\|_F$, donde $\| \cdot \|_F$ denota la norma-1?

[1] Se ruega al lector estudioso que comunique al autor (`luis.salinas@inf.utfsm.cl`) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.

6. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica $f(t)$, constante por secciones, que puede ser descrita en un período mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}0 & \text{si} \quad 0{,}0 \leq t < 0{,}2\,, \\ 2{,}0 & \text{si} \quad 0{,}2 \leq t < 0{,}4\,, \\ 1{,}0 & \text{si} \quad 0{,}4 \leq t < 0{,}6\,, \\ 1{,}5 & \text{si} \quad 0{,}6 \leq t < 0{,}8\,, \\ 0{,}5 & \text{si} \quad 0{,}8 \leq t < 1{,}0\,, \end{cases} \tag{1}$$

Para aproximar la señal $f(t)$ *en el intervalo* $[0,1[$ se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma

$$p(t) = c_0 + c_1 \sin \pi t + c_2 \sin 2\pi t + c_3 \sin 3\pi t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

(a) Usando la factorización QR *à la Householder*, determine los coeficientes c_k, $k = 0:3$, que minimizan el error cuadrático:

$$E_1 = \left(\sum_{j=0}^{4} |f(0{,}10 + j\,0{,}20) - p(0{,}10 + j\,0{,}20)|^2 \right)^{1/2} . \tag{3}$$

(b) Usando la factorización SVD, determine los coeficientes c_k, $k = 0:3$, que minimizan el error cuadrático:

$$E_2 = \left(\int_0^1 |f(t) - p(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} . \tag{4}$$

CERTAMEN N$^{\underline{\text{O}}}$ 4

7. Considere el sistema de ecuaciones $A.x = b$. Estudie el condicionamiento de este problema en términos del número de condición de la matriz A con respecto a una perturbación δb del vector de datos. Puede Vd. suponer que A no experimenta ninguna perturbación. En particular, dé una estimación de $\|\delta x\|/\|x\|$.

8. Sea H la matriz de Hilbert de 4×4. Defina $A = H - 0{,}75\, I_4$. Mathematica (TM) arroja los siguientes valores para *la parte real* de los valores propios de la matriz A:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_1) = -0{,}7499032976959804\,, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda_2) = -0{,}7432617263942364\,,$$
$$\mathrm{Re}\,(\lambda_3) = -0{,}58085877977855\,, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda_4) = 0{,}7502142800592428\,,$$

garantizando que el valor absoluto de las respectivas *partes imaginarias* es menor que 10^{-16}

(a) Determine *exactamente* las partes imaginarias de los valores propios λ_i

Considere ahora el método de Jacobi aplicado a la solución del sistema lineal $A.x = b := [1, -1, 1, -1]^T$ a partir de $x^{(0)} = [-3/5, 2, -4/5, 9/5]^T$

(b) ¿Converge el método de Jacobi en este caso?

(c) Si acaso el método de Jacobi converge en este caso, ¿cuantas iteraciones requeriría Vd. para garantizar que el error absoluto de su solución aproximada fuere menor que 10^{-3}? Si no converge, pase a (d).

(d) Converja o no, efectue 2 iteraciones completas del método de Jacobi

Notas "sine qua non": *(a) Duración del certamen: 60 minutos para un certamen; 90 minutos para dos.*
(b) El certamen debe ser resuelto individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble.*
(c) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 6 de abril de 2005