Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso

Valparaíso–Santiago

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 1 — Sábado 09 de Abril de 2005 [1]

1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\\lambda\\-3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}5\\7\\-2\end{bmatrix} \quad \text{y, en general :} \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \overset{T}{\mapsto} \begin{bmatrix}u(x,y,z)\\v(x,y,z)\\w(x,y,z)\end{bmatrix}.$$

(a) Determine explícitamente T, i.e., determine $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

(b) Determine la matriz asociada a esta transformación T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(c) Determine para qué valores de la constante λ la transformación lineal T es inyectiva (i.e. 1:1).

(d) Demuestre o refute: *si la transformación lineal T es inyectiva, entonces las imágenes de los vectores canónicos bajo T también constituyen una base de* $\mathbb{R}^3$.

2. Considere la matriz real $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\3 & 9 & 6 & 12\\4 & 12 & 11 & 19\end{bmatrix}$.

(a) Determine el *espacio nulo izquierdo* $N(A)$ y el *espacio nulo derecho* $N(A^T)$ de A.

(b) Determine $\dim N(A)$, $\dim N(A^T)$, $\dim C(A)$, $\dim F(A)$, donde $C(A)$ denota el *espacio de columnas* de A, y $F(A)$ es el *espacio de filas* de A.

(c) Verifique las ortogonalidades que corresponda entre los cuatro espacios considerados en (b).

(d) Determine sendas bases para los cuatro espacios considerados en (b).

Hint: Obtenga la forma escalonada de la matriz A.

3. Compute la matriz:

$$M := e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots, \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Hint: Diagonalice la matriz A mediante una matriz diagonalizante P, de modo que $P^{-1}AP = \Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, donde los λ_j son los valores propios de A. Observe, entonces, que:

$$P^{-1}A^kP = \prod_{j=1}^{k} \left(P^{-1}AP\right) = \underbrace{\left(P^{-1}AP\right) \dots \left(P^{-1}AP\right)}_{k \text{ veces}} = \Lambda^k = \operatorname{diag}\left[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k\right], \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Usando (1) y (2), compute $P^{-1}MP = P^{-1}e^AP$. Después, use álgebra matricial y sentido común.

Nota "sine qua non": *Duración del certamen:* **90 minutos**. *El certamen debe ser resuelto* individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble. ¡Buena suerte!*

LA+JC+RL+OO+LS+CT/lsc, 9 de Abril de 2005

 Se ruega al lector estudioso que comunique al autor (`luis.salinas@inf.utfsm.cl`) todo error que descubra en estos ejercicios, así como también cualquier observación o comentario que estime pertinente.