Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso–Santiago

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 2 — Sábado 14 de Mayo de 2005[1]

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule la norma de Frobenius de la matriz A.

(b) Calcule la norma espectral de la matriz $B := A^T A$.

(c) Calcule la ***norma natural*** o ***norma inducida*** de la matriz A por la norma vectorial Euclideana en los espacios $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Hint: *En la pregunta (c), según sea su humor, utilice una SVD completa de la matriz A (teniendo presente que las matrices unitarias preservan la norma Euclideana, cuestión que Ud. también deberá hacer evidente) o bien proceda al mejor estilo "bulldozer" reparando que:*

$$\big[\cos\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\big]^T \in \mathbb{R}^3\,, \qquad 0 \le \vartheta < 2\pi\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,$$

es un sistema de vectores a dos parámetros que recorre ***toda*** *la esfera unitaria S^2 de $\mathbb{R}^3$. Después estudie la imagen de S^2 bajo la acción de la matriz A. Equivalentemente se puede describir los vectores $\mathbf{v} \in S^2$ mediante:*

$$\mathbf{v} = \big[x, y, z\big]^T \in \mathbb{R}^3 \quad \textit{con la restricción} \quad \|\mathbf{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,$$

lo que conduce a otra manera de resolver el problema.

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Obtenga la SVD de la matriz A.

(b) Usando el resultado de (a), determine una base para $\textbf{Range}\,(A) \equiv \textbf{col}\,(A)$.

(c) Usando el resultado de (a), determine una base para $\textbf{Null}\,(A)$.

3. Considere la misma matriz del problema **2.**

(a) Obtenga el proyector sobre $\textbf{Range}\,(A) \equiv \textbf{col}\,(A)$.

(b) Obtenga el proyector sobre $\textbf{Null}\,(A)$

Nota "sine qua non": *Duración del certamen:* **90 minutos**. *El certamen debe ser resuelto* individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble. ¡Buena suerte!*

LA+JC+RL+OO+LS+CT/lsc, 14 de Mayo de 2005

[1] © Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 1 de febrero de 2007. De antemano se agradece toda corrección, crítica o comentario que el amable lector tenga a bien hacer llegar a `luis.salinas@usm.cl`.