Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso–Santiago

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 3 — Sábado 25 de Junio de 2005[1]

Nota: Ejercicio **1.** obligatorio. Además, elija **uno** de entre los ejercicios **2.** y **3.** 90 minutos!!!

1. (a) `[30 pts]` Aplicando el algoritmo de Householder, obtenga la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b) `[20 pts]` Calcule el número de condición generalizado (esto es, reemplazando A^{-1} por la inversa generalizada de Moore-Penrose A^{+}) $\kappa(A)$ de la matriz A con respecto a la norma matricial de Frobenius(-Hilbert-Schmidt).

(c) `[10 pts]` Considere un sistema computacional de base o *radix* $\beta = 3$, con palabras cuyo formato es el siguiente: (i) una celda para el signo; (ii) dos celdas para el exponente; y (iii) cinco celdas para la mantisa. ¿Cuál es la perturbación más pequeña de $\kappa(A)$ perceptible en el formato descrito?
Nota: Observe que los números que pueden ser almacenados en el formato descrito tienen la forma:

$$\pm \left(\sum_{k=1}^{5} m_k \beta^{-k} \right) \times \beta^{(\sigma_1 \beta^1 + \sigma_0 \beta^0 - 11)}\,, \qquad m_k, \sigma_j \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}\,, \quad m_1 \neq 0\,. \tag{2}$$

El número 11, escrito en la base $\beta = 3$, es el llamado *bias* del exponente.

2. `[40 pts]` La fórmula de Cardano (Geronimo Cardanus, 1501-1576) para determinar *la* raíz real x_0 de la ecuación de tercer grado $x^3 + 3px + 2q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, cuando la discriminante $D := q^2 + p^3$ es *estrictamente positiva*, viene dada por:

$$x_0 = u + v\,, \qquad u = \sqrt[3]{-q + t}\,, \qquad v = \sqrt[3]{-q - t}\,, \qquad t = \sqrt[2]{q^2 + p^3}\,. \tag{3}$$

Suponga que p, q son dos números *positivos*.
(a) Determine los *números de condición* de x_0 en términos de p y q.
(b) ¿Está bien condicionado el problema del cálculo de x_0 en términos de p y q? Justifique.

3. `[40 pts]` Los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ se definen mediante la ecuación:

$$T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \qquad \big(x = \cos\vartheta\big)\,. \tag{4}$$

Específicamente, los cuatro primeros polinomios $T_n(x)$ vienen dados por:

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x\,, \qquad -1 \leq x \leq 1\,. \tag{5}$$

(a) Verifique que los polinomios $T_n(x)$, $n = 0 : 3$, son ortogonales entre sí sobre el intervalo $[-1, 1]$, con respecto a la función de ponderación:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \qquad -1 \leq x \leq 1\,. \tag{6}$$

(b) Determine los coeficientes c_j que minimizan la expresión:

$$\sum_{k=0}^{6} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}(k-3)\right) - \sum_{j=0}^{3} c_j T_j \left(\frac{\pi}{6}(k-3)\right) \right)^2 \tag{7}$$

END

Nota "sine qua non": *Duración del certamen:* **90 minutos**. *El certamen debe ser resuelto* individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble. ¡Buena suerte!*

LA+JC+RL+OO+LS+CT/lsc, 25 de Junio