

## Computación Científica I Certámenes Recuperativos — Sábado 02 de Julio de 2005 <sup>1</sup>

---

### CERTAMEN N<sup>o</sup> 1

1. (i) Sea  $P$  una pirámide cuya base es un triángulo equilátero de lado  $a$  y sus tres *apotemas* (= alturas de los triángulos laterales) son idénticas y de longitud  $2a$ .

Calcule la longitud de las alturas de la pirámide  $P$ . ¿Cuál es el menor ángulo que pueden formar dos alturas de  $P$ ?

(ii) Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  dos vectores cualesquiera. Demuestre o refute:  $4\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma Euclideana.

2. Considere la matriz:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Determine los subespacios  $N(A)$ ,  $\text{Left}N(A)$ ,  $\text{Row}(A)$  y  $\text{Column}(A)$ .

(b) Verifique explícitamente las relaciones de ortogonalidad que corresponda entre estos subespacios (considerando bases apropiadas).

---

### CERTAMEN N<sup>o</sup> 2

3. Considere las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) ¿Cuáles son los proyectores ortogonales  $P$  y  $Q$  sobre  $\text{Column}(A) \equiv \text{Range}(A)$  y  $\text{Column}(B) \equiv \text{Range}(B)$ , respectivamente, y cuáles son las imágenes del vector  $(1, 2, 3)^*$  bajo  $P$  y  $Q$ ?

(b) Determine s.c.P.L.P. factorizaciones QR reducidas para  $A$  y  $B$ .

4. Considere la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\pi/2} \\ 0 & \cos(\pi/3) \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$ , donde  $i^2 = -1$ .

(a) Obtenga la SVD reducida de  $A$ .

(b) Determine la imagen de  $S := \{(t, e^{it}) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq \pi/2\}$  bajo la acción de la transformación lineal definida por la matriz  $A$ . Por favor, procure que su respuesta sea lo más cuantitativa posible.

---

### CERTAMEN N<sup>o</sup> 3

5. Considere la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$ .

(a) Determine la factorización QR completa de la matriz  $A$  a la Householder.

(c) Determine la norma natural de  $Q$ .

(d) ¿Se cumple  $\|A\|_F \leq \|Q\|_F \|R\|_F$ , donde  $\|\cdot\|_F$  denota la norma-1?

---

<sup>1</sup>© Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 1 de febrero de 2007. De antemano se agradece toda corrección, crítica o comentario que el amable lector tenga a bien hacer llegar a [luis.salinas@usm.cl](mailto:luis.salinas@usm.cl).

6. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica  $f(t)$ , constante por secciones, que puede ser descrita en un período mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 0,0 & \text{si } 0,0 \leq t < 0,2, \\ 2,0 & \text{si } 0,2 \leq t < 0,4, \\ 1,0 & \text{si } 0,4 \leq t < 0,6, \\ 1,5 & \text{si } 0,6 \leq t < 0,8, \\ 0,5 & \text{si } 0,8 \leq t < 1,0, \end{cases} \quad (1)$$

Para aproximar la señal  $f(t)$  en el intervalo  $[0, 1[$  se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma

$$p(t) = c_0 + c_1 \sin \pi t + c_2 \sin 2\pi t + c_3 \sin 3\pi t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Usando la factorización  $QR$  à la *Householder*, determine los coeficientes  $c_k$ ,  $k = 0 : 3$ , que minimizan el error cuadrático:

$$E_1 = \left( \sum_{j=0}^4 |f(0,10 + j \cdot 0,20) - p(0,10 + j \cdot 0,20)|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

**Notas “sine qua non”:** (a) *Duración del certamen: 60 minutos para un certamen; 120 minutos para dos. Sólo un problema por set de hojas, please!*

(b) *El tiempo es escaso. Por lo tanto, procure avanzar tanto como pueda en cada uno de los problemas que aborde. No es imprescindible que resuelva completamente los ejercicios que aborde para obtener la nota máxima. Ud. debe demostrar, más allá de toda duda razonable, que es capaz de resolver los problemas que elija.*

(c) *El certamen debe ser resuelto individualmente con un bolígrafo de tinta indeleble.*

(d) *¡Buena suerte!*

LSC/lsc, 2 de Julio de 2005