

## Computación Científica I Certamen N<sup>o</sup> 3 — Mi.14.06.06<sup>1</sup>

1. El método de Householder para obtener la factorización QR de una matriz  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$  queda resumido en el siguiente algoritmo (denominado algoritmo HH en lo que sigue):

```
1. for  $k = 1$  to  $n$ 
2.    $x = A_{k:m,k}$ 
3.    $v_k = \text{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1 + x$ 
4.    $v_k = v_k / \|v_k\|_2$ 
5.    $A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2v_k (v_k^* A_{k:m,k:n})$ 
```

Sea  $R$  a la matriz que resulta de  $A$  al aplicar el algoritmo precedente.

- (a) ¿Cuál es la dimensión de de la matriz  $R$ ?
  - (b) Si  $A$  es una matriz cualquiera, ¿qué forma tiene  $R$ ?
  - (c) Si  $A$  es Hermitiana, ¿qué clase de matriz resulta  $R$ ?
  - (d) Si  $A$  es real simétrica, ¿qué clase de matriz resulta  $R$ ?
  - (e) ¿A qué corresponde  $x_1$  en la línea 3. algoritmo HH? Más precisamente, si  $k = 3$ , ¿qué denota  $x_1$ ?
  - (f) ¿Qué papel cumple la línea 5. del algoritmo HH?
  - (g) ¿Aparecen explícitamente reflectores de Householder en alguna fase del algoritmo precedente?
- Si  $Q_k$  denota el reflector de Householder correspondiente a la  $k$ -ésima iteración del algoritmo HH,
- (h) ¿Cuál es la dimensión de la matriz que representa a  $Q_k$ ?
  - (i) ¿Cómo queda definida algebraicamente la matriz de  $Q_k$  en términos de  $v_k$ ?
  - (j) ¿Cómo se obtiene  $Q$  en la factorización QR de  $A$ ?
  - (k) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo HH?

2. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica  $f(t)$ , constante por secciones, que puede ser descrita en un período mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 0,0 & \text{si } 0,0 \leq t < 0,2, \\ 2,0 & \text{si } 0,2 \leq t < 0,4, \\ 1,0 & \text{si } 0,4 \leq t < 0,6, \\ 1,5 & \text{si } 0,6 \leq t < 0,8, \\ 0,5 & \text{si } 0,8 \leq t < 1,0, \end{cases} \quad (1)$$

Para aproximar la señal  $f(t)$  en el intervalo  $[0, 1[$  se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma

$$p(t) = c_0 + c_1 \cos \pi t + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \cos 3\pi t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Usando la factorización QR a la Householder, determine los coeficientes  $c_k$ ,  $k = 0 : 3$ , que minimizan el error cuadrático:

$$E_1 = \left( \sum_{k=0}^4 |f(0,10 + k 0,20) - p(0,10 + k 0,20)|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

**Notas “sine qua non”:** (a) Duración del examen: 90 minutos. (b) El certamen debe ser resuelto individualmente con un bolígrafo de tinta indeleble. (c) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 14 de Junio de 2006

---

<sup>1</sup>© Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 1 de febrero de 2007. De antemano se agradece toda corrección, crítica o comentario que el amable lector tenga a bien hacer llegar a [luis.salinas@usm.cl](mailto:luis.salinas@usm.cl).