Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática

Computación Científica I
Certámenes Recuperativos — Miércoles 21 de Junio de 2006 [1]

Certamen N° 1

1. Sea $A \in M(m \times m, \mathbb{C})$ tal que $A = A^*$. (a) Demuestre que todos los valores propios de A son reales.
(b) Demuestre que dos vectores propios asociados a valores propios distintos de la matriz A, son ortogonales.

2. Considere la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine los cuatro espacios subespacios estándar $N(A)$, Left$N(A)$, Row(A) y Column(A) asociados a la matriz A.

(b) Verifique explícitamente las relaciones de ortogonalidad que corresponda entre estos subespacios (considerando bases apropiadas).

Certamen N° 2

3. Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) ¿Cuáles son los proyectores ortogonales P y Q sobre Column$(A) \equiv$ Range(A) y Column$(B) \equiv$ Range(B), respectivamente, y cuáles son las imágenes del vector $(1, 2, 3)^*$ bajo P y Q?
(b) Determine las factorizaciones QR reducidas y completas para A y B.

4. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$, donde $i^2 = -1$.

(a) Obtenga la SVD completa de A.

(b) Determine la imagen de la esfera unitaria $S := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}$ bajo la acción de la transformación lineal definida por la matriz A. Por favor, procure que su respuesta sea lo más cuantitativa posible.

(c) ¿Qué relaciones cuantitativas advierte Ud. entre las partes (a) y (b) de esta tarea?

Certamen N° 3

5. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Determine la factorización *QR completa* de la matriz A *à la Gram-Schmidt*. (b) Determine la norma natural de Q. (c) ¿Se cumple $\|A\|_F \leq \|Q\|_F \|R\|_F$, donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma de Frobenius?

6. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica $f(t)$, constante por secciones, que puede ser descrita en un período

[1]© Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 1 de febrero de 2007. De antemano se agradece toda corrección, crítica o comentario que el amable lector tenga a bien hacer llegar a `luis.salinas@usm.cl`.

mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}0 & \text{si} \quad 0{,}0 \le t < 0{,}2\,, \\ 2{,}0 & \text{si} \quad 0{,}2 \le t < 0{,}4\,, \\ 1{,}0 & \text{si} \quad 0{,}4 \le t < 0{,}6\,, \\ 1{,}5 & \text{si} \quad 0{,}6 \le t < 0{,}8\,, \\ 0{,}5 & \text{si} \quad 0{,}8 \le t < 1{,}0\,, \end{cases} \tag{1}$$

Para aproximar la señal $f(t)$ *en el intervalo* $[0,1[$ se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma

$$p(t) = c_0 + c_1 \operatorname{tg}\frac{t}{2} + c_2 \operatorname{tg} 2\frac{t}{2} + c_3 \operatorname{tg} 3\frac{t}{2}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Usando la factorización QR *à la Householder*, determine los coeficientes c_k, $k = 0:3$, que minimizan el error cuadrático:

$$E_1 = \left(\sum_{j=0}^{4} |f(0{,}10 + j\,0{,}20) - p(0{,}10 + j\,0{,}20)|^2 \right)^{1/2}\,. \tag{3}$$

Notas "sine qua non": *(a) El alumno debe elegir un y sólo un certamen, precisamente aquel en que haya obtenido la menor nota en los certámenes regulares.*

(b) Duración del certamen: 90 minutos.

(c) El certamen debe ser resuelto individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble.*

(d) ¡Buena suerte!

LSC/lsc, 21 de Junio de 2006