Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso–Santiago

Computación Científica I
Solución Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 1 — Sábado 01 de Abril de 2007[1]

1. Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$. El *producto cruz* en $\mathbb{R}^3$ se define mediante:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1\big(a_2b_3 - a_3b_2\big) - \boldsymbol{e}_2\big(a_1b_3 - a_3b_1\big) + \boldsymbol{e}_3\big(a_1b_2 - a_2b_1\big) \tag{1}$$

donde $\big\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\big\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Demuestre o refute:

$$\big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\big)^T . \Big(\big(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\big) \times \big(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}\big)\Big) = \big(\det \big[\boldsymbol{a}\big|\boldsymbol{b}\big|\boldsymbol{c}\big]\big)^2 . \tag{2}$$

Desarrollo. De (1) se desprende que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \\
\big(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\big) \times \big(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}\big) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & -b_1c_3 + b_3c_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_2a_3 - c_3a_2 & -c_1a_3 + c_3a_1 & c_1a_2 - c_2a_1 \end{vmatrix} \\
&= \big(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1\big) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} ,
\end{aligned}$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\big)^T . \big(\big(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\big) \times \big(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}\big)\big) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Big(c_1\big(a_2b_3 - a_3b_2\big) + c_2\big(a_1b_3 - a_3b_1\big) + c_3\big(a_1b_2 - a_2b_1\big) \Big) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \big(\det \big[\boldsymbol{a}\big|\boldsymbol{b}\big|\boldsymbol{c}\big]\big)^2 ,
\end{aligned}$$

lo que demuestra la identidad (2). ∎

[1] © Luis Salinas Carrasco, Valparaíso, 6 de mayo de 2007. De antemano se agradece toda corrección, crítica o comentario que el amable lector tenga a bien hacer llegar a `luis.salinas@usm.cl`.

2. Considere la matriz cuadrada tridiagonal:

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & i\sin\frac{\pi}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -i\sin\frac{\pi}{4} & 1 & i\sin\frac{2\pi}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sin\frac{2\pi}{4} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i\sin\frac{(n-2)\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -i\sin\frac{(n-2)\pi}{4} & 1 & i\sin\frac{(n-1)\pi}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i\sin\frac{(n-1)\pi}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (3)$$

donde $i^2 = -1$.

(a) Calcule $\det D_4$ y $\det D_8$.

(b) Después de (a), Ud. ya debería saber calcular todos los $\det D_{4n}$. ¿Cuánto vale $\det D_{4n}$?

(c) Escriba un programa en *pseudocódigo* para calcular $\det D_{2007}$. En el contexto de esta tarea, discuta *brevemente* el escandaloso conflicto entre Gauss y Laplace.

(d) *"Yapa"*: Por un puntaje *adicional* significativo, calcule explícitamente $\det D_{2007}$.

Desarrollo. (a) Observamos que:

$$\det D_4 = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{vmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & i \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(1 - 1 - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}\,.$$

Sobre esta base obtenemos ahora:

$$\det D_8 = \det \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 \end{array}\right]$$

$$= \det \left[\begin{array}{c|c} D_4 & 0 \\ \hline 0 & D_4^* \end{array}\right] = \det D_4 \ \det D_4^* = (\det D_4)^2 = \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2\,.$$

Esto responde (a).

(b) De la parte (a) resulta ahora evidente que $\det D_{4n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El lector escéptico podrá demostrar este resultado mediante inducción.

(c) Hay varios algoritmos posibles para calcular $\det D_{2007}$. Quizás el más simple de todos se base en la igualdad:

$$\det D_{2007} = \det D_{4\times 501}\ \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} = \left(-\tfrac{3}{4}\right)^{501} \left(1 - 1 - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{501} ,$$

cuya programación es directa.

Otra solución posible consiste en hacer el desarrollo de Laplace de $\det D_n$ con respecto a la última columna (resp., la última fila):

$$\det D_n = \det D_{n-1} - i \sin \tfrac{(n-1)\pi}{4} \det \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & i\sin\frac{\pi}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -i\sin\frac{\pi}{4} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -i\sin\frac{(n-3)\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -i\sin\frac{(n-3)\pi}{4} & 1 & i\sin\frac{(n-2)\pi}{4} \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -i\sin\frac{(n-1)\pi}{4} \end{array}\right]$$

$$= \det D_{n-1} - i \sin \tfrac{(n-1)\pi}{4} \left(-i \sin \tfrac{(n-1)\pi}{4}\right) \det D_{n-2}$$

$$= \det D_{n-1} - \sin^2 \left(\tfrac{(n-1)\pi}{4}\right) \det D_{n-2} , \qquad 3 \le n \in \mathbb{N} .$$

Esta ecuación de recurrencia, junto con las condiciones iniciales:

$$D_1 = 1 , \qquad D_2 = 1 - \sin^2 \tfrac{\pi}{4} = \cos^2 \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2} ,$$

permite calcular $\det D_n$ para todo $3 \le n \in \mathbb{N}$. Nuevamente, la programación es directa.

Todavía otra solución posible consiste en aplicar el método de la eliminación Gaussiana. Para discutir con mayor simplicidad los aspectos esenciales de este algoritmo, supondremos que tenemos la matriz D_n almacenada en un arreglo bidimensional $D_n[i,j]$, $i = 1 : n$, $j = 1 : n+1$, con $D_n[i, n+1] = 0$ para todo $i = 1, n$. Hemos agregado la $(n+1)$-ésima columna de ceros solamente para simplificar el algoritmo (se evita así un tratamiento diferente para la última fila del arreglo $D_n[i,j]$). Obviamente esta suposición representa un enorme desperdicio de memoria pues D_n es una matriz tridiagonal Hermitiana. No obstante, las diversas optimizaciones posibles serán más que evidentes; ellas quedan de tarea.

Algoritmo 1 Eliminación Gaussiana

$i := 2$
Det $:= 1$
while $i \le n$ **do**
  for $j := i-1$ to $i+1$ **do**
    $D_n[i,j] \leftarrow D_n[i,j] - D_n[i-1,j] * D_n[i,i-1]/D_n[i-1,i-1]$
  end for
  Det $\leftarrow$ Det $* D_n[i,i]$
end while

Obsérvese que la cláusula de actualización de las celdas $D_n[i,j]$ corresponde a la substracción a la i-ésima de un *múltiplo* de la $(i-1)$-ésima fila. Tal operación no altera el valor del determinante. La matriz resultante de la aplicación del algoritmo precedente a la matriz inicial $D_n[i,j]$, $i,j = 1 : n$, es una matriz triangular superior, de modo que el valor final de la variable Det es el valor del determinante $\det D_n$.

La complejidad de eliminación Gaussiana aplicada la cálculo de un determinante *general*, con pocos o ningún coeficiente nulo, es de orden n^3. La misma complejidad para la expansión de Laplace es, como se sabe, de orden $n!$. La diferencia de complejidad entre ambos métodos es, ciertamente, escandalosa. Sin embargo, en el cálculo del determinante $\det D_n$, no hay ningún conflicto pues D_n es una matriz tridiagonal: la complejidad de ambos métodos es del mismo orden aproximadamente. Queda de *tarea* calcular exactamente la complejidad de ambos métodos para matrices tridiagonales. ∎

3. Con referencia a la matriz D_n de (3):
(a) Determine el *spektrum* $\sigma(D_4^* D_4) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ de $D_4^* D_4$.
(b) Sea $A_1 = \lambda_1 I_4 - D_4 * D_4$. Calcule $\mathrm{Null}(A_1)$ y $\mathrm{Col}(A_1)$.
(c) Ortonormalice los vectores columnas de A_1.
(d) *"Yapa"*: Por un puntaje *adicional* significativo, calcule las normas espectral y natural de A_1.

Desarrollo. (a) Un cálculo directo muestra que la matriz $M := D_4^* D_4$ y su polinomio característico $p_M(\lambda) \equiv p_{D_4^* D_4}(\lambda)$ vienen dados, respectivamente, por:

$$M := D_4^* D_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad p_M(\lambda) \equiv p_{D_4^* D_4}(\lambda) = \tfrac{1}{16}\left(3 - 4\lambda^2\right)^2.$$

Luego, el *spektrum* de $M := D_4^* D_4$ viene dado por $\sigma(D_4^* D_4) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, donde cada uno de los valores propios tiene multiplicidad algebraica 2.
(b) Elijamos $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces:

$$A_1 = \lambda_1 I_4 - D_4^* D_4 \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Evidentemente A_1 es una matriz real simétrica. Observamos que:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Null}(A_1) \quad &\Leftrightarrow \quad A_1 . x = 0\,, \\ &\Leftrightarrow \quad A_{1,k} \,.\, x = \big(k\text{-ésima fila de } A_1\big) . x = 0\,, \quad k = 1:4\,, \\ &\Leftrightarrow \quad \big(A_1^\ell\big)^T . x = \big(\ell\text{-ésima columna de } A_1\big) . x = 0\,, \quad \ell = 1:4 \quad (A_1 \text{ es simétrica})\,, \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Col}(A_1)^T\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, bastará hallar una base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que (por ejemplo) $\{b_1, b_2\}$ constituya una base $\mathrm{Col}(A_1)$. Entonces, automáticamente $\{b_3, b_4\}$ será una base de $\mathrm{Null}(A_1)$. Para hallar tal base basta aplicar adecuadamente el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, partiendo de los vectores columnas de A_1:

$$b_1 = \frac{A_1^1}{\|A_1^1\|} = \left[-\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{3}}{6}}\,,\ 0\,,\ \tfrac{-1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\,,\ 0\right]^T,$$

$$b_2 = \frac{A_1^2 - (A_1^2.b_1).b_1}{\|A_1^2 - (A_1^2.b_1).b_1\|} = \left[0\,,\ -\sqrt{\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}}\,,\ 0\,,\ \tfrac{-1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\,,\ 0\right]^T.$$

Fácilmente se verifica que A_1^3 y A_1^4 están en el espacio generado por b_1 y b_2. En efecto, se comprueba que:

$$A_1^3 - \big(A_1^3.b_1\big)\,b_1 - \big(A_1^3.b_2\big)\,b_2 = A_1^4 - \big(A_1^4.b_1\big)\,b_1 - \big(A_1^4.b_2\big)\,b_2 = 0\,.$$

Se deduce de aquí, entonces, que $\mathrm{Col}(A_1)$ efectivamente es generado por los vectores b_1 y b_2. Evidentemente, $\mathrm{Col}(A_1)$ también queda generado por las dos primeras columnas de la matriz A_1. Ello responde la primera parte de la pregunta (b).

Para hallar b_3 y b_4 podemos partir de dos vectores *arbitrarios* que no estén en el espacio generado por b_1 y b_2, por ejemplo, $U = \big[0, 1, 0, 0\big]^T$ y $V = \big[0, 0, 1, 0\big]^T$. Se obtiene:

$$b_3 = \frac{U - (U.b_1).b_1 - (U.b_2).b_2}{\|U - (U.b_1).b_1 - (U.b_2).b_2\|} = \left[0\,,\ -\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{3}}{6}}\,,\ 0\,,\ \tfrac{-1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\right]^T ,$$

$$b_4 = \frac{V - (V.b_1).b_1 - (V.b_2).b_2 - (V.b_3).b_3}{\|V - (V.b_1).b_1 - (V.b_2).b_2 - (V.b_3).b_3\|} = \left[\tfrac{-1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\,,\ 0\,,\ \sqrt{\tfrac{3+\sqrt{3}}{6}}\,,\ 0\right]^T .$$

Fácilmente se verifica que:

$$b_1^T.b_1 = b_2^T.b_2 = b_3^T.b_3 = b_4^T.b_4 = 1\,,$$
$$b_1^T.b_2 = b_1^T.b_3 = b_1^T.b_4 = b_2^T.b_3 = b_2^T.b_4 = b_3^T.b_4 = 0\,,$$

i.e., $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ tal que $\{b_1, b_2\}$ es una base de $\mathrm{Col}(A_1)$ y, por lo tanto, $\{b_3, b_4\}$ es una base de $\mathrm{Null}(A_1)$, lo que responde la segunda parte de (b).

(c) En el desarrollo de (b) ya se efectuó la ortonormalización pedida: ella viene dada por los vectores b_1 y b_2.

■

Nota "sine qua non": *Duración del certamen:* **90 minutos**. *El certamen debe ser resuelto* individualmente *con un bolígrafo de tinta indeleble. ¡Buena suerte!*

Your CC1 Team: LS+Teaching Assistants/lsc, 6 de mayo de 2007