Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso–Santiago

Computación Científica I
Certamen N$^{\underline{\text{o}}}$ 3 — Sa.30.06.07[1]

1. Una señal de audio viene representada por $y_k = 10\sin(2\pi k/7)$, $k = 0:7$, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Se requiere representar esta señal mediante el polinomio trigonométrico:

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_3 \cos 3t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,. \tag{1}$$

Note que en $p(t)$ no aparece el término $\cos 2t$. Determine a_0, a_1, a_3 de modo que se minimice el error cuadrático entre la señal dada y $p(t)$.

Desarrollo. El problema consiste determinar los coeficientes a_0, a_1, a_3 que minimizan la expresión:

$$\sum_{k=0}^{7} \left(10\sin\tfrac{2\pi k}{7} - p\left(\tfrac{2\pi k}{7}\right)\right)^2 = \sum_{k=0}^{7} \left(10\sin\tfrac{2\pi k}{7} - \left[a_0 + a_1\cos\tfrac{2\pi k}{7} + a_3\cos 3\tfrac{2\pi k}{7}\right]\right)^2\,, \tag{2}$$

que, como se sabe, es equivalente a minimizar:

$$\left\| b - A.\left[a_0,\, a_1,\, a_3\right]^T \right\|_2\,, \qquad a_0, a_1, a_3 \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

cuya solución viene dada por:

$$\left[a_0,\, a_1,\, a_3\right]^T = A^{+}.b\,, \tag{4}$$

donde $A^{+} = (A^{+}.A)^{-1}.A^{*}$ es la inversa de More-Penrose de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi 0}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 0}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 1}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 1}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 2}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 2}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 3}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 3}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 4}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 4}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 5}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 5}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 7}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 6}{7}\right) \\ 1 & \cos\frac{2\pi 7}{7} & \cos\left(3\cdot\frac{2\pi 7}{7}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}623490 & -0{,}900969 \\ 1 & -0{,}222521 & 0{,}623490 \\ 1 & -0{,}900969 & -0{,}222521 \\ 1 & -0{,}900969 & -0{,}222521 \\ 1 & -0{,}222521 & 0{,}623490 \\ 1 & 0{,}623490 & -0{,}900969 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\,, \tag{5}$$

y b es la matriz de datos de la señal:

$$b = \begin{bmatrix} 10\sin\frac{2\pi 0}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 1}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 2}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 3}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 4}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 5}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 6}{7} \\ 10\sin\frac{2\pi 7}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7{,}81831 \\ 9{,}74928 \\ 4{,}33884 \\ -4{,}33884 \\ -9{,}74928 \\ -7{,}81831 \\ 0. \end{bmatrix}\,. \tag{6}$$

Los cálculos parciales arrojan los siguientes resultados:

$$A^{*}.A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 4{,}5 & 1 \\ 1 & 1 & 4{,}5 \end{bmatrix}\,, \qquad (A^{*}.A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}130952 & -0{,}0238095 & -0{,}0238095 \\ -0{,}0238095 & 0{,}238095 & -0{,}047619 \\ -0{,}0238095 & -0{,}047619 & 0{,}238095 \end{bmatrix}\,, \tag{7}$$

$$A^+ = (A^*.A)^{-1}.A^* = \begin{bmatrix} 0{,}0833333 & 0{,}166667 & 0{,}166667 \\ 0{,}1375590 & 0{,}167544 & -0{,}268016 \\ 0{,}1214055 & -0{,}106481 & 0{,}135237 \\ 0{,}1577021 & -0{,}227729 & -0{,}0338874 \\ 0{,}1577021 & -0{,}227729 & -0{,}0338874 \\ 0{,}1214055 & -0{,}106481 & 0{,}135237 \\ 0{,}1375590 & 0{,}167544 & -0{,}268016 \\ 0{,}0833333 & 0{,}166667 & 0{,}166667 \end{bmatrix}^T , \tag{8}$$

y finalmente:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = A^+.b = \begin{bmatrix} -6{,}66134 \times 10^{-16} \\ 2{,}22045 \times 10^{-16} \\ -4{,}44089 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Mencionemos que el problema también se puede resolver utilizando la expresión de A^+ en términos de las descomposiciones QR o SVD de A, a saber:

$$A^+ = \widehat{Q}^{-1}.\widehat{R}\,, \qquad A^+ = V.\widehat{\Sigma}^{-1}.\widehat{U}^*\,. \tag{10}$$

■

2. Considere el *problema* de obtener la factorización de Cholesky [2] $A = LL^*$ de una matriz *real, simétrica, positiva definida* $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, donde $L \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ es una matriz triangular inferior.

(a) Exprese este *problema* mediante el formalismo $f : X \to Y$. Identifique los espacios vectoriales normados y determine la expresión matemática exacta $f(A) = L$, i.e., obtenga una expresión exacta para la matriz L. Explicite dónde interviene la condición que A es positiva definida.

(b) Obtenga una estimación para el *número de condición relativo* correspondiente a f.

(c) Determine un algoritmo $\widetilde{f} : X \to Y$ que resuelva prácticamente el problema (a). Identifique claramente $\widetilde{f}$.

(d) Decida si su algoritmo es "*accurate*" o "*stable*" o "*backward stable*". Basta decidir una cualquiera de estas tres opciones (i.e., no se pide decidir las tres opciones).

(e) Suponga que los coeficientes de A experimentan un perturbación aleatoria de p %. Obtenga una estimación para la perturbación resultante en $\det(L)$.

Desarrollo. (a) Primeramente observamos que podemos considerar:

$$X = Y = M(2 \times 2, \mathbb{R})\,, \tag{11}$$

aunque las matrices que aparecen en este ejercicio sólo dependen de 3 parámetros. Hay varias opciones para la norma a elegir sobre X e Y. Quizás la más simple es elegir la *norma de Frobenius* $\|\cdot\|_F$ en ambos espacios.

[2]**André-Louis Cholesky** (n. el 15 de Octubre de 1875 en Montguyon, Francia; m. el 31 de Agosto de 1918 en el Norte de Francia). Matemático francés. Cholesky ingresó a la célebre École Polytechnique a la edad de 20 años, egresando en el arma de Artillería. En 1905 se unió a la sección de Geodesia del Servicio Geográfico del Ejército donde fue Oficial de Topografía. Destacó inmediatamente por una inteligencia poco común, una gran facilidad para los trabajos matemáticos, por espíritu curioso y sus ideas originales. Murió en combate en el Norte de Francia hacia fines de la Primera Guerra Mundial. Póstumamente fue publicado su método para la solución numérica de la ecuación normal que aparece en la aplicación del método de los cuadrados mínimos. La factorización matricial que se usa en este método se denomina *descomposición de Cholesky* en su honor y recuerdo.

La función f que representa el problema planteado, viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \longmapsto f(A) = L = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

La matriz L se obtiene con facilidad a partir de:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 + w^2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

lo que conduce al sistema de ecuaciones:

$$u^2 = a\,, \qquad uv = b\,, \qquad v^2 + w^2 = c\,, \tag{14}$$

cuya solución es:

$$u = \sqrt{a}\,, \qquad v = \frac{b}{\sqrt{a}}\,, \qquad w = \sqrt{c - \frac{b^2}{a}} = \sqrt{\frac{ac - b^2}{a}}\,. \tag{15}$$

En (15) queda claro dónde y cómo interviene la condición que A es positiva definida:

$$A \quad \text{p.d.} \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \quad \text{y} \quad ac - b^2 > 0\,, \tag{16}$$

lo que garantiza que v y w están bien definidos.

(b) Bajo los supuestos ya enunciados, el número de condición relativo en $x = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in X$ viene dado por:

$$\kappa_f(x) = \sup_{\delta x} \frac{\|\delta f\|_Y / \|f(x)\|_Y}{\|\delta x\|_X / \|x\|_X} = \sup_{\delta x} \frac{\|\delta f\|_Y / \|\delta x\|_X}{\|f(x)\|_Y / \|x\|_X}\,, \qquad x = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})\,. \tag{17}$$

En vista de la diferenciabilidad de la función f con respecto a los parámetros a, b, c, la perturbación δf se calcula fácilmente mediante la diferencial de f:

$$\begin{aligned} \delta f &= \frac{\partial L}{\partial a}\,\delta a + \frac{\partial L}{\partial b}\,\delta b + \frac{\partial L}{\partial c}\,\delta c \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2a^{1/2}} & 0 \\ -\frac{b}{a^{3/2}} & \frac{b^2}{2a^2}\,\frac{a^{1/2}}{\sqrt{ac-b^2}} \end{bmatrix}}_{=:P} \delta a + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{a^{1/2}} & -\frac{b}{a}\,\frac{a^{1/2}}{\sqrt{ac-b^2}} \end{bmatrix}}_{=:Q} \delta b + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^{1/2}}{2\sqrt{ac-b^2}} \end{bmatrix}}_{=:R} \delta c \\ &= P\,\delta a + Q\,\delta b + R\,\delta c\,. \end{aligned} \tag{18}$$

De aquí, mediante la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se obtiene inmediatamente una estimación para la norma de la perturbación en f:

$$\begin{aligned} \|\delta f\|_Y &\le \|P\|_Y\,|\delta a| + \|Q\|_Y\,|\delta b| + \|R\|_Y\,|\delta c| \\ &\le \left(\|P\|_Y^2 + \|Q\|_Y^2 + \|R\|_Y^2\right)^{1/2} \left(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Recordando que tanto en X como en Y usamos la norma de Frobenius, esta desigualdad se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\|\delta f\|_Y &\equiv \|\delta f\|_F \\
&\leq \|P\|_F\,|\delta a| + \|Q\|_F\,|\delta b| + \|R\|_F\,|\delta c| \\
&\leq \left(\|P\|_F^2 + \|Q\|_F^2 + \|R\|_F^2\right)^{1/2} \left(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\|P\|_F^2 + \|Q\|_F^2 + \|R\|_F^2\right)^{1/2} \left(\delta a^2 + 2\delta b^2 + \delta c^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\|P\|_F^2 + \|Q\|_F^2 + \|R\|_F^2\right)^{1/2} \|\delta x\|_F \\
&= \left(\|P\|_F^2 + \|Q\|_F^2 + \|R\|_F^2\right)^{1/2} \|\delta x\|_X \,.
\end{aligned} \tag{20}$$

A partir de aquí, mediante un cálculoalgebraico simple (pero tedioso), se obtiene:

$$\|\delta f\|_Y / \|\delta x\|_X \leq \left(\|P\|_F^2 + \|Q\|_F^2 + \|R\|_F^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{a^3 - ab^2 + 5a^2c + b^2c}}{2a\sqrt{ac - b^2}} \,. \tag{21}$$

En vista de que $f(x) = L$, se tiene:

$$\|f(x)\|_Y = \|L\|_F = \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ac - b^2}{a}}\right)^2} = \sqrt{a + c}\,. \tag{22}$$

Por otro lado:

$$\|x\|_X = \| \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \|_F = \sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}\,, \tag{23}$$

de modo que:

$$\|f(x)\|_Y / \|x\|_X = \frac{\sqrt{a + c}}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}}\,, \tag{24}$$

Luego, de (17), (21) y (24) se obtiene:

$$\kappa_f(x) \leq \frac{\sqrt{a^3 - ab^2 + 5a^2c + b^2c}\,\sqrt{a^2 + 2b^2 + c^2}}{2a\sqrt{a + c}\,\sqrt{ac - b^2}}\,. \tag{25}$$

(c) Un algoritmo evidente para resolver el problema planteado   Un algoritmo evidente para resolver el problema planteado queda descrito mediante:

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \longmapsto \widetilde{f}(x) = \widetilde{L} = \begin{bmatrix} \widetilde{L}_{11} & 0 \\ \widetilde{L}_{21} & \widetilde{L}_{22} \end{bmatrix}\,, \tag{26}$$

con:

$$\widetilde{L}_{11} = \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a})] \tag{27}$$

$$\widetilde{L}_{21} = \mathrm{fl}\,(\mathrm{b})\ \ \mathbf{div}\ \ \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a})] \tag{28}$$

$$\widetilde{L}_{22} = \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a}) \otimes \mathrm{fl}\,(\mathrm{c}) \ominus \mathrm{fl}\,(\mathrm{b}) \otimes \mathrm{fl}\,(\mathrm{b})]\ \ \mathbf{div}\ \ \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a})]\,, \tag{29}$$

donde $\mathrm{Sqrt}\,[\cdot]$ es un algoritmo que extrae la raíz cuadrada de un número positivo, $\mathrm{fl}\,(\cdot)$ es el operador de "floating" bien conocido, que representa los números en el sistema de coma flotante disponible y $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$ y **div** son las operaciones aritméticas de máquina.

(d) Los siguientes cálculos, autoexplicativos, resuelven el problema:

$$\widetilde{a} = \mathrm{fl}\,(\mathrm{a}) = a(1+\varepsilon_a)\,, \quad \mathrm{fl}\,(\mathrm{b}) = b(1+\varepsilon_b)\,, \quad \mathrm{fl}\,(\mathrm{c}) = c(1+\varepsilon_c)\,,$$

$$\widetilde{L}_{11} = \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a})] = \sqrt{a}\left(1+\frac{\varepsilon_a}{2}\right)(1+\varepsilon_w) = \sqrt{a}\,(1+\varepsilon_1)\ ,$$

$$\text{donde}\quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a}{2} + \varepsilon_w\,, \quad |\varepsilon_a|, |\varepsilon_w| < \varepsilon_{\mathrm{mach}}\,, \quad |\varepsilon_1| < \tfrac{3}{2}\,\varepsilon_{\mathrm{mach}}\,.$$

$$\widetilde{L}_{21} = \mathrm{fl}\,(\mathrm{b})\ \mathbf{div}\ \mathrm{Sqrt}\,[\mathrm{fl}\,(\mathrm{a})] = \frac{b(1+\varepsilon_b)}{\sqrt{a}(1+\varepsilon_1)}\,(1+\varepsilon_q) = \frac{b}{\sqrt{a}}\,(1+\varepsilon_2)\,,$$

$$\text{donde}\quad \varepsilon_2 = \varepsilon_b - \varepsilon_1 + \varepsilon_q\,, \quad |\varepsilon_2| < 3\,\varepsilon_{\mathrm{mach}}\,.$$

$$\begin{aligned}
\text{Numerador}(\widetilde{L}_{22}) &= \mathrm{fl}\,(\mathrm{a}) \otimes \mathrm{fl}\,(\mathrm{c}) \ominus \mathrm{fl}\,(\mathrm{b}) \otimes \mathrm{fl}\,(\mathrm{b}) \\
&= \Big[a(1+\varepsilon_a)c(1+\varepsilon_c)(1+\varepsilon_p) - b(1+\varepsilon_b)b(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_p)\Big](1+\varepsilon_s) \\
&= ac(1+\varepsilon_3) - b^2(1+\varepsilon_4) = (ac-b^2)(1+\varepsilon_5)\,, \quad \text{donde :} \\
&\quad \varepsilon_3 = \varepsilon_a + \varepsilon_c + \varepsilon_p + \varepsilon_s\,, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_b + \varepsilon_p + \varepsilon_s\,, \quad \varepsilon_5 = \frac{ac\,\varepsilon_3 - b^2\,\varepsilon_4}{ac-b^2}\,.
\end{aligned}$$

$$\text{Denominador}(\widetilde{L}_{22}) = \mathrm{fl}\,(\mathrm{a}) = a(1+\varepsilon_a)\,.$$

$$\begin{aligned}
\text{Radicando}(\widetilde{L}_{22}) &= \frac{\text{Numerador}(\widetilde{L}_{22})}{\text{Denominador}(\widetilde{L}_{22})} = \frac{(ac-b^2)(1+\varepsilon_5)}{a(1+\varepsilon_a)}\,(1+\varepsilon_q) \\
&= \frac{(ac-b^2)}{a}\,(1+\varepsilon_6)\,, \quad \text{donde} \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_a + \varepsilon_q\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_{22} &= \mathrm{Sqrt}\left[\text{Radicando}(\widetilde{L}_{22})\right] = \mathrm{Sqrt}\left[\frac{(\mathrm{ac}-\mathrm{b}^2)}{\mathrm{a}}\,(1+\varepsilon_6)\right] \\
&= \sqrt{\frac{(ac-b^2)}{a}}(1+\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_6)(1+\varepsilon_w) \\
&= \sqrt{\frac{(ac-b^2)}{a}}(1+\varepsilon_7)\,, \quad \text{donde} \quad \varepsilon_7 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_6 + \varepsilon_w\,.
\end{aligned}$$

De consiguiente se tiene:

$$\widetilde{L}_{11} = L_{11}(1+\varepsilon_1)\,, \quad \widetilde{L}_{21} = L_{21}(1+\varepsilon_2)\,, \quad \widetilde{L}_{22} = L_{22}(1+\varepsilon_7)\,,$$

de modo que el algoritmo es "*backward stable*".

(e) Basta aplicar la fórmula (18) con $\delta a = \frac{pa}{100}$, $\delta b = \frac{pb}{100}$, $\delta c = \frac{pc}{100}$.

■

Notas "sine qua non": *Duración del examen:* **90 minutos**. *El certamen debe ser resuelto* individualmente *usando un bolígrafo de tinta indeleble. ¡Buena suerte!*