Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática

Computación Científica I
Certámenes Recuperativos — Miércoles 04 de Julio de 2007

Certamen N$^{\underline{\text{O}}}$ 1

1. Considere la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine los subespacios $N(A)$, Left$N(A)$, Row(A) y Column(A).

(b) Verifique explícitamente las relaciones de ortogonalidad que corresponda entre estos subespacios (considerando bases apropiadas).

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \\ a & c \end{bmatrix}$, donde $1 > a > \frac{1}{2} > b > \frac{1}{2^2} > c > \frac{1}{2^3} > d > \frac{1}{2^4}$.

(a) Determine las mejores cotas superiores e inferiores posibles para la norma-1 de A.
(b) Determine las mejores cotas superiores e inferiores posibles para la norma-∞ de A.
(c) Determine las mejores cotas superiores e inferiores posibles para la norma natural de A, suponiendo la norma Euclideana en los espacios dominio ($\mathbb{R}^2$) e imagen ($\mathbb{R}^3$).

Certamen N$^{\underline{\text{O}}}$ 2

3. Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
(a) Determine el proyector ortogonal P sobre Col$(A) \equiv$ Range(A).
(b) Determine la imagen del vector $\begin{bmatrix}1, 2, 3\end{bmatrix}^*$ bajo la acción del proyector P.
(c) Determine la factorización QR reducidas de B.

4. Obtenga la SVD completa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$, donde $i^2 = -1$.

Certamen N$^{\underline{\text{O}}}$ 3

5. En un problema de procesamiento de señales ha surgido la necesidad de representar en forma aproximada una señal periódica $f(t)$, constante por secciones, que puede ser descrita en un período mediante la expresión:

$$f\Big|_{[0,1/5[} = 0\,, \quad f\Big|_{[1/5,2/5[} = 2\,, \quad f\Big|_{[2/5,3/5[} = 1\,, \quad f\Big|_{[3/5,4/5[} = 3/2\,, \quad f\Big|_{[4/5,1[} = 1/2\,, \tag{1}$$

donde $f\Big|_{[2/5,3/5[} = 1$ significa $f(t) = 1$ para $2/5 \leq t < 3/5$, etc. Para aproximar la señal $f(t)$ *en el intervalo* $[0, 1[$ se desea recurrir a polinomios trigonométricos de la forma $p(t) = c_0 + c_1 \sin \pi t + c_2 \sin 2\pi t + c_3 \sin 3\pi t$, $t \in \mathbb{R}$. Usando la factorización SVD, determine los coeficientes c_k, $k = 0 : 3$, que minimizan el error cuadrático:

$$E_2 = \left(\int_0^1 |f(t) - p(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} . \tag{2}$$

6. Considere el *problema* de la inversión de una matriz no singular $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ tal que $\det A = 1$ (recuerde: A no singular si y sólo si $\det A \neq 0$).

(a) Exprese este *problema* mediante el formalismo $f : X \to Y$. Identifique los espacios vectoriales normados y determine la expresión matemática exacta $f(A) = A^{-1}$.

(b) Obtenga una estimación para el *número de condición relativo* correspondiente a f.

(c) Determine un algoritmo $\widetilde{f} : X \to Y$ que resuelva prácticamente el problema (a). Identifique claramente $\widetilde{f}$.

(d) Decida si su algoritmo es "*accurate*" o "*stable*" o "*backward stable*". Basta decidir una cualquiera de estas tres opciones (i.e., no se pide decidir las tres opciones).

(e) Suponga que los coeficientes de A experimentan un perturbación aleatoria de p %. Obtenga una estimación para la perturbación resultante en $\det A^{-1}$.