Universidad Técnica "Federico Santa María"
Departamento de Informática
Valparaíso–Santiago

Computación Científica I,[1] 2007
Guía N$^{\underline{o}}$ 1
Valparaíso–Santiago, 20 de marzo de 2007[2]

I. Ficha Técnica de la Asignatura.

1. Programa.

Asignatura:	Computación Científica I.
Sigla:	ILI-285.
Créditos:	4.
Prerrequisito:	MAT-024 Matemática IV.
Examen:	No tiene.
Horas de Cátedra Semanales:	4.
Horas de Ayudantía Semanales:	2 (en promedio).
Horas de Laboratorio Semanales:	2 (en promedio).

Objetivos: Al aprobar la asignatura el alumno *debería ser capaz* de:

(1) Seleccionar las estructuras de datos, los algoritmos y las plataformas computacionales más apropiadas para abordar problemas concretos que pueden reducirse al modelado computacional lineal.
(2) Resolver los problemas mencionados, teniendo en cuenta la complejidad y el costo de los algoritmos involucrados.
(3) Integrar técnicas de programación y modelado computacional lineal en aplicaciones de Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias de la Ingeniería.
(4) Emplear programas de modelado computacional lineal de uso más frecuente en la Ingeniería (por ejemplo, Matlab(R), Mathematica(R), Maple(R).

Contenido:

(1) Introducción a la computación científica y a la computación de alto rendimiento. Elementos a considerar en cada ítem: plataformas computacionales para los métodos cuantitativos; estructuras de datos más afines; complejidad de los algoritmos involucrados.
(2) Sistemas lineales en general. Computación matricial. Computación con matrices ralas. Condicionamiento y estabilidad. Estructuras de datos más afines y complejidad de los algoritmos involucrados.
(3) Problemas computacionales de valores y vectores propios. Formas normales de Jordan, Frobenius y Schur. Elementos de la teoría espectral. Estructuras de datos más afines y complejidad de los algoritmos involucrados.
(4) Métodos iterativos y sistemas lineales de gran escala. Elementos de programación lineal. Modelos computacionales lineales y elementos de la programación paralela.
(5) Elementos de la teoría y control de errores en el cálculo computacional lineal.
(6) Aplicaciones a la Estadística y la Ingeniería. Mínimos cuadrados. Multicolinealidad. Matrices de correlación. Teoría de redes. Elementos de la teoría de juegos.

Bibliografía ampliada:

[1] A.V. Aho and J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974.
[2] D.J. Higham, N.J. Higham. *Matlab Guide*. Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2000.

[1]Proyecto UTFSM-DGIP 2006-2007 Desarrollo de Textos Docentes.

[3] Seymour Lipschutz. *3,000 Solved Problems in Linear Algebra*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY 10121-2298, 1989. This is a good source for elementary exercises!

[4] Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Schaum's Outline of Linear Algebra*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY 10121-2298, 2000. This is a good source for elementary theory and exercises!

[5] Seymour Lipschutz, Marc Lipson. *Schaum's Easy Outline of Linear Algebra* McGraw-Hill, Inc., New York, NY 10121-2298, 2002. Also a good source for elementary theory and exercises!

[6] G. Lindfield and J. Penny. *Numerical Methods using MATLAB*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2000.

[7] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] A. Quarteroni and R. Saco and F. Saleri. *Numerische Mathematik 1 und 2* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002.

[9] J. Stoer, U. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag, New York - Berlin, 1992.

[10] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA 02181 USA, 1993. *Note*: A very good elementary book indeed!

[11] L.N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997. *Note*: This is **the** book. A very good book indeed! More advanced than Strang's book.

[12] L.N. Trefethen. *Spectral Methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), Philadelphia, 2000. This is "the" text!

2. De los prerrequisitos: ILI-285 es la primera de una *secuencia* de dos asignaturas: ILI-285 e ILI-286. El prerrequisito canónico de esta *secuencia* de asignaturas es MAT-024 Matemática IV.

Con el objeto de no retrasar el avance académico de los alumnos que deben o desean cursar ILI-285 *sin* haber aprobado todavía el prerrequisito MAT-024, se ha decidido aceptar *excepcionalmente* que inscriban la asignatura ILI-285 en el primer semestre 2007, siempre y cuando tengan aprobada la asignatura MAT-023.

Sin embargo, para inscribir ILI-286 en el segundo semestre 2007 se *exigirá* haber aprobado tanto MAT-024 como ILI-285.

3. De la evaluación: La asignatura considera los siguientes instrumentos de evaluación:

(1) Certamen de Cátedra Nº 1: Sábado 14.04.2007, 10:00 horas.
Origina una nota *individual* N_1.
(2) Certamen de Cátedra Nº 2: Sábado 19.05.2007, 10:00 horas.
Origina una nota *individual* N_2.
(3) Certamen de Cátedra Nº 3: Sábado 23.06.2007, 10:00 horas.
Origina una nota *individual* N_3.
(4) Las fechas señaladas son provisorias y deberán ser precisadas durante el transcurso del semestre.
(5) El alumno que **no** rinda uno o más de los certámenes regulares de cátedra, por las razones que fuere, recibirá la calificación *provisoria* $N_j = 0$ en esos certamenes.
(6) Habrá además un **Certamen Recuperativo Voluntario** abierto a todos los alumnos. Fecha de este certamen: Sábado 30.06.2007, 10:00 horas. La fecha señalada es provisorias y deberá ser precisada durante el transcurso del semestre.
   - Este certamen tendrá tres secciones, correspondientes cada una a las materias cubiertas por los tres certaámenes regulares de cátedra.
   - El alumno que, habiendo rendido todos los certámenes regulares de cátedra y rindiere el Certamen Recuperativo, deberá abordar aquella sección en la que hubiere obtenido la menor calificación.
     El alumno que, por las razones que fuere, no hubiere rendido uno o dos certámenes de cátedra, pero no más, deberá abordar la o las secciones correspondientes a los certámenes no rendidos.

- El estudiante recibirá una nota N'_j en cada sección j que aborde.
- Las notas N'_j sustituirán a las notas N_j de los certámenes regulares de cátedra.
- No habrá certamen recuperativo del certamen recuperativo (!).

Obsérvese que esta regulación interna de la asignatura cubre el caso de los alumnos que, por la razón que fuere, no hayan rendido algunos de los certámenes regulares de cátedra.

(7) A lo largo del semestre se propondará un abundante número de ejercicios teóricos y prácticos (trabajos computacionales de laboratorio) que los alumnos deberán abordar (i.e., estudiar, resolver, implementar, discutir, etc.) en las Ayudantías y los Laboratorios de la Asignatura. *El trabajo de los estudiantes en la solución de estos ejercicios y trabajos de laboratorio será evaluado mediante tres (3) controles individuales.*
El promedio aritmético de las calificaciones obtenidas en esos tres *controles*, dará origen a una nota *individual* N_4 para cada estudiante.

(8) Desarrollo de un tema de investigación (mayormente bibliográfica) relacionado con el temario de la asignatura, especialmente acerca de las aplicaciones de la Computación Científica en la Informática, la Ciencia de la Computación y las diversas especialidades de la Ingeniería y la Ciencia.
Cada tema debe ser abordado por un equipo formado por unos cinco alumnos. Los temas específicos podrán ser propuestos por los propios integrantes del grupo, o bien asignados por los Profesores y Ayudantes. La proposición de temas y la composición de los grupos debe ser informada por escrito a los Ayudantes antes del 15 de Abril del año en curso.
Los avances y principales resultados de esta actividad deberán ser expuestos periódicamente a lo largo del semestre, mediante conferencias de no más de 15 minutos, dictadas por uno de los miembros del grupo correspondiente, elegido al azar. Las conferencias incluyen un período de preguntas que deberán ser respondidas por cualquiera de los miembros del equipo de trabajo.
Esta actividad da origen a una nota N_5 que será la misma para todos los integrantes del equipo de trabajo.

(9) La nota final N_F se calculará mediante la siguiente fórmula:

$$N_F = \begin{cases} \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} N_j\,, & \text{si } \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} N_j \geq 50\,, \\ \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} N_j\,, & \text{si } \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} N_j < 50\,. \end{cases}$$

(10) Cualquier situación no considerada en este reglamento interno será resuelta por los Profesores de la asignatura.

Nota: Un problema abierto en la evaluación cuantitativa de cualquier actividad, incluyendo los procesos de enseñanza-aprendizaje, es la determinación de ciertos *parámetros descriptores*, justos y equitativos, que representen razonablemente bien los logros alcanzados en esa actividad.

En los procesos lectivos, por lo general, los diversos parámetros descriptores finalmente se reducen a uno solo, NF, mediante alguna fórmula más o menos arbitraria, v.g., promedio geométrico, promedio aritmético, promedio ponderado, etc. A veces, para efectos de decidir la aprobación o reprobación de una asignatura, en lugar de considerar un solo valor NF, es preferible considerar un conjunto de parámetros descriptores significativos y *regiones admisibles* para sus valores.

Un excelente ejercicio de modelación matemática y de Computación Científica, lo constituye la determinación de un esquema de evaluación que permita estimar adecuadamente los logros académicos de los estudiantes en una asignatura.

Los alumnos quedan cordialmente invitados a reflexionar sobre este tema y a plantear fundamentadamente sus soluciones mediante artículos *ad hoc*.

El equipo docente de ILI-285 le desea una provechosa estada en la asignatura, mucho éxito en su trabajo, y le recuerda que estará siempre atento a recibir sus comentarios, consultas, sugerencias y observaciones.

II. Ejercicios.

Recapitulación de la Geometría Vectorial Elemental.
Vectores y Planos en el Espacio Tridimensional.

1. [4, probl. 793] Sea $\overrightarrow{\mathrm{OA}}= 35\vec{i} - 27\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}= 15\vec{i} + 11\vec{k}$. Hallar: (a) las coordenadas del punto medio de AB; (b) las coordenadas del punto P que esté sobre la prolongación de AB y que cumpla con $AP : BP = 19 : 9$.

2. [4, probl. 794], Si los dos vectores $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ del problema **1.** se multiplican por el escalar $-1\frac{7}{8}$ (menos uno siete octavos), ¿en qué tanto % aumenta el módulo del vector $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, siendo $\overrightarrow{\mathrm{OM}}= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{ON}}= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$?

3. [4, probl. 802] Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Zusatz 2003: (a) Descomponga ambos vectores en términos de los vectores unitarios correspondientes a las diagonales de los octantes $\{x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$, $\{x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\}$, y $\{x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$.
(b) Determine la respectiva proyección de cada vector sobre el otro.

4. [4, probl. 804] Determinar un número λ tal que los vectores $3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ y $8\vec{i} - 9\vec{j} + \lambda\vec{k}$ sean perpendiculares entre sí.
Zusatz 2003: (a) ¿Existen valores de λ para los cuales el ángulo entre los vectores precedentes es $\frac{3}{11}\pi$ `[radianes]`? Si existen, determínelos todos.
(b) ¿Existen valores de λ tales que la proyección del vector dependiente de λ sobre el otro es el 29 % de la longitud euclideana de este último? Si tales λ existen, determínelos todos.

5. [4, probl. 805] ¿Para qué valor de c, el vector $\vec{j} - c\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$ es perpendicular al vector $5\vec{k} - c\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$?
Zusatz 2003: (a) ¿Existen valores de c para los cuales el ángulo entre los vectores precedentes es $\frac{4}{11}\pi$ `[radianes]`? Si existen, determínelos todos.
(b) ¿Existen valores de c tales que la proyección del mayor de los vectores sobre el menor es el 13 % de la longitud euclideana de este último? Si tales c existen, determínelos todos.

6. [4, probl. 808] Determinar el vector $\left(3\vec{a} - 5\vec{b}\right) \times \left(4\vec{a} + 7\vec{b}\right)$, sabiendo que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

7. [4, probl. 809] Si $||\vec{a} \times \vec{b}|| = 1$, ¿cuánto vale $\left\|\left(8\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(8\vec{a} - \vec{b}\right)\right\|$? *Nota*: $\|\vec{v}\|$ denota la norma Euclideana del vector $\vec{v}$.

8. [4, probl. 810] Sea $\vec{a} = 17\vec{i} - 31\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}$. Determinar:
(a) un número c tal que $\left(\vec{a} + c\vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + c\vec{a}\right) = 0$;
(b) un número x tal que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ sea perpendicular al vector $x\vec{i} + 25\vec{j} + 6\vec{k}$.
Zusatz 2003: (c) todos los número t tales que la proyección del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ sobre el vector $t^3\vec{i} - 5t^2\vec{j} + (6 - 2t + 5t^2)\vec{k}$ equivale al 3,141592653 % de la longitud euclideana de $\vec{a} \times \vec{b}$.

9. [4, probl. 812] Sea $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$. Determinar un vector $\vec{v}$ tal que se cumplan las relaciones $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ y $\vec{v} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$.

10. [4, probl. 820] Si $\vec{a} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 7\vec{j}$, determinar un vector $\vec{v}$ que cumpla con las condiciones $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ y $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$.

11. [4, probl. 824] Sea: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Determinar dos escalares σ y τ tales que $\vec{c} = \sigma\vec{a} + \tau\vec{b}$.

12. [4, probl. 836] ¿Qué ángulo forman entre sí los planos con las ecuaciones $z = 2 - 6x - 7y$, $z = 1 - 8x + 7y$?

13. [4, probl. 837] Si $A = (4, 1, 1)$, $B = (1, 4, 5)$, ¿qué vector es la proyección del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sobre el plano con ecuación $3x - 12y + 4z = 4$?

14. [4, probl. 841] Una recta L está dada como intersección de dos planos con las ecuaciones: $3x - y + 4z = 8$, $-24x + 5y - 3z = 6$. Determinar la proyección de la recta L sobre el plano $z = 0$.
Zusatz 2003: (a) Determinar la proyección de la recta L sobre el plano $x - \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = \sqrt{5}$.
(b) Los planos dados, ¿son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

15. [4, probl. 842] Los planos con las ecuaciones: $4x + 2y + z = 8$, $x + y - 10z = 0$, tienen una recta de intersección. Calcular el ángulo de inclinación de esta recta con respecto al plano $9x - 5y - 3z = 1$.

16. [4, probl. 847] ¿Con cuáles condiciones han de cumplir los seis coeficientes a, b, c, f, g, h (todos distintos de cero) para que la recta con las ecuaciones $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ sea perpendicular al plano con la ecuación $\dfrac{x}{f} + \dfrac{y}{g} + \dfrac{z}{h} = 1\,$?

17. [4, probl. 875] Si A y B son dos matrices cuadradas del tipo $n \times n$ (con determinante $\neq 0$), determinar un número c tal que: $(cI_n)^2 + A(B - A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})^{-1}$.

18. En estos ejercicios seguiremos la convención de escribir los vectores $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, como vectores-columna de dimensión n o matrices de $n \times 1$, esto es, en la forma:

$$x = [x_1, \ldots, x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

lo que, de paso, define la operación $[\ldots]^T$ de *transposición* para vectores.
En general, para $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}\,,$$

se define la *matriz transpuesta* A^T y la *matriz conjugada Hermitiana* A^* de A mediante:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \ldots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{n2} \\ \overline{a}_{13} & \overline{a}_{23} & \ldots & \overline{a}_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1m} & \overline{a}_{2m} & \ldots & \overline{a}_{nm} \end{bmatrix},$$

donde $\overline{a}_{ij}$ denota el complejo conjugado de a_{ij}. Obsérvese que A^T, $A^* \in M(n \times m, \mathbb{C})$.
Sean $u = [1, \sqrt{2}, -1]^T \in \mathbb{R}^3$, $v = [1, 1, \sqrt{3}]^T \in \mathbb{R}^3$, $w = [-\sqrt{2}, -\sqrt{5}, -1]^T \in \mathbb{R}^3$.
Describa gráficamente los siguientes conjuntos:

(a) $P = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v$. (b) $Q = -\frac{1}{3}v + \frac{4}{3}v$.
(c) $R = \frac{7}{5}v - \frac{2}{5}v$. (d) $T = \{(1-t)u + tv \, : \, 0 \leq t \leq 1\}$.
(e) $L = \{(1-t)u + tv \, : \, t \in \mathbb{R}\}$. (f) $E = \{\alpha u + \beta w \, : \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
(g) $A = u + \{\alpha v + \beta w \, : \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Además estudie las siguientes cuestiones:

(h) ¿Constituye $\{u, v, w\}$ una base para $\mathbb{R}^3$?
(i) De los conjuntos de la lista (a)-(g), ¿cuáles son espacios vectoriales? Para aquellos que lo sean, determine su dimensión.
(j) Para todos los espacios vectoriales de dimensión 2 que aparezcan en la lista (a)-(g), determine una *base ortonormal*.
(k) Como el lector sabe, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\{e_1, e_2, e_3\}$, con $e_1 = [1, 0, 0]^T$, $e_2 = [0, 1, 0]^T$, $e_3 = [0, 0, 1]^T$. Sea $x = x_1e_1 + x_2e_1 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$ un vector tal que también se puede escribir en la forma $x = \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w \in \mathbb{R}^3$. Los números x_i, ξ_j se llaman *coordenadas del vector* x. ¿Admite todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ ambas representaciones? ¿Son únicas? ¿Cuáles son las reglas de transformación entre los x_i y los ξ_j?, esto es, ¿cuáles son las expresiones de los ξ_j en términos de los x_i y, recíprocamente, de los x_i en función de los ξ_j?

Recapitulación del Algebra Lineal Elemental.

19. [2, cf. p. 5] Sean $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x - y - 2z = 0\}$, ambos equipados con la estructura de espacio vectorial canónica. Determine $U \cap V$ y $U + V := \{u + v \, : \, u \in U, \, v \in V\}$. ¿Son $U \cap V$ y $U + V$ espacios vectoriales?

20. [11, p. 110, 10] ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales?
(a) El conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ con $b_1 = 0$.
(b) El conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ con $b_1 = 1$.
(c) El conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ con $b_1b_2b_3 = 0$.
(d) El conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ con $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.
(e) El conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ con $b_1 \leq b_2 \leq b_3$.
(f) Todas las combinaciones lineales de los vectores $v = (1, 4, 0)^T$ y $w = (2, 2, 2)^T$.
(g) Todos los vectores u ortogonales (perpendiculares) a los vectores v, w precedentes. ¿Qué forma tienen todos estos vectores u?

21. [11, p. 110, 11] Describa el subespacio vectorial más pequeño de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ que contiene las matrices: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22. [11, p. 110, 17, 18] ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del conjunto de las matrices cuadradas $M(m \times m, \mathbb{C})$ son espacios vectoriales?
(a) El conjunto de las matrices A *invertibles*.
(b) El conjunto de las matrices A *singulares* (i.e., tales que A^{-1} no existe).
(c) El conjunto de las matrices *simétricas* (i.e., tales que $A^T = -A$).
(d) El conjunto de las matrices *antisimétricas* (i.e., tales que $A^T = -A$).
(e) El conjunto de las matrices *asimétricas* (i.e., tales que $A^T \neq A$).
(f) El conjunto de las matrices *ortogonales* (i.e., tales que $AA^T = A^TA = I$).
(g) El conjunto de las matrices *unitarias* (i.e., tales que $AA^* = A^*A = I$).

¿Cuáles de los anteriores conjuntos constituyen un grupo con respecto a la multiplicación de matrices?

23. [2, cf. p. 6] Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\emptyset \neq M \subseteq E$. Considere la intersección D de todos los subespacios V de E tales que $M \subseteq V$. Demuestre que: (a) D es un espacio vectorial unívocamente definido; (b) D es el espacio vectorial *más pequeño* (con respecto a inclusión) que contiene a M; (c) D coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales (finitas) de elementos de M.

El espacio vectorial D se denota habitualmente por $\mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(M)$ o $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}(M)$ y se denomina *espacio vectorial generado* o *engendrado* por el conjunto M. Las propiedades (a), (b), (c) quedan resumidas en:

$$\begin{cases} (i) \quad \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(M) = span_{\mathbb{K}}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \,:\, n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{K}\,,\ x_k \in M \right\}, \\ (ii) \quad V \text{ subespacio vectorial de } E \text{ tal que } M \subseteq V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(M) \subseteq V\,. \end{cases} \tag{2}$$

Sea p el polinomio $p(x) = 1 - x + 3x^3$, q el polinomio $q(x) = -2 + 5x^2 - x^3$, r el polinomio $r(x) = -x + x^3$, s el polinomio $r(x) = 2 - x^2$, donde x es una variable real, i.e., $x \in \mathbb{R}$. Determine: (d) $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\{p, r\})$; (e) $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\{q, r, s\})$; (f) $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}(\{p, q, r, s\})$;

24. [8, cf. p. 28] *El cuerpo de los números complejos.* Defina:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \alpha_{kl} E^k I^l \,:\, \alpha_{kl} \in \mathbb{R}\,,\ n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}. \tag{3}$$

Considere el conjunto C equipado con la suma y la multiplicación usuales de matrices con $E^0 = I^0 = I$ Evidentemente $C \subseteq M(2 \times 2, \mathbb{R})$. (a) Para $u, v \in C$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ¿se cumple $\alpha u + \beta v \in C$, $uv \in C$? (b) Determine C en cuanto espacio vectorial real. En particular, ¿cuál es la dimensión del espacio vectorial real C? *Hint*: Verifique que $I^2 = -E$. (c) Para $w, z \in C$ cualesquiera, ¿se cumple $wz = zw$? (d) Si $z \in C$ no es la matriz nula de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, ¿puede Ud. determinar z^{-1}? (e) ¿Puede Ud. definir un isomorfismo de espacios vectoriales (resp., de cuerpos) $\phi : C \to \mathbb{C}$?

25. [8, cf. p. 31, ejemplo 1] Sea $\varphi(\lambda) = -2 - 5\lambda + 3\lambda^2$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $\varphi(A)$.

26. [8, cf. p. 31, ejemplo 2] Demuestre que la matriz $U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $i^2 = -1$, es unitaria. ¿Puede Ud. generalizar este resultado para matrices de orden n? ¿Bajo qué condiciones una matriz diagonal resulta ser ortogonal? ¿unitaria?

27. [8, cf. p. 31, ejemplo 4] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denuestre o refute: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Recapitulación de la Teoría Elemental de Matrices.

28. [1, p. 39, 1] Sean dadas las siguientes matrices: $A, B \in M(4 \times 5, \mathbb{R})$, $C \in M(5 \times 2, \mathbb{R})$, $D \in M(4 \times 2, \mathbb{R})$, $E \in M(5 \times 4, \mathbb{R})$. Determine cuáles de las siguientes matrices están bien definidas y, en estos casos, indique sus números de filas y de columnas: (a) BA, (b) $AC + D$, (c) $AE + B$, (d) $AB + B$, (e) $E(A + B)$, (f) $E(AC)$, (g) $E^T A$, (h) $(A^T + E)D$.

29. [1, p. 40, 8, 10] Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$. Escriba, si ello es posible:
(a) las columnas de AB como c.l.[3] de las columnas de A, respectivamente, de B,
(b) las columnas de BA como c.l. de las columnas de A, respectivamente, de B,
(a) las filas de AB como c.l. de las filas de A, respectivamente, de B,
(a) las filas de BA como c.l. de las filas de A, respectivamente, de B.
En cada caso, si la tarea es imposible, explique por qué.

[3] c.l. = combinación lineal.

30. [1, p. 41, 15] Sean A y B dos matrices particionadas en submatrices (¡no necesariamente cuadradas ni todas iguales!) de modo que $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$. Entonces se tiene:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

bajo la hipótesis que las dimensiones de las submatrices permiten las multiplicaciones y las sumas señaladas. Este método se denomina *mutiplicación por bloques.*

(a) Demuestre (4) y luego, usando esta fórmula, calcule los productos (b) y (c). Compruebe sus resultados mediante multiplicación directa.

(b) $A = \left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hdashline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hdashline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$ (c) $A = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hdashline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hdashline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

31. En 1969 Volker Strassen (Profesor Emérito Universität Konstanz, 2001) publicó un algoritmo para la multiplicación de matrices que es algo más rápido que la multiplicación ordinaria. En este ejercicio describimos el algoritmo de Strassen. Ref.: Strassen, Volker, *Gaussian Elimination is not Optimal*, Numer. Math. **13**, p. 354-356, 1969.

Sean $A, B, C \in M(2^n \times 2^n, \mathbb{C})$ donde C es el producto ordinario de A y B, i.e. $C = AB$. Si las matrices A, B no son de orden 2^n, las completamos con filas y columnas de ceros. A continuación particionamos A, B, C en bloques de igual tamaño (de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\,, \end{bmatrix}$$

donde A_{ij}, B_{ij}, $C_{ij} \in M(2^{n-1} \times 2^{n-1}, \mathbb{C})$, de modo que (cf. ejercicio (30)):

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}\,, & C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}\,, \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}\,, & C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}\,, \end{aligned}$$

Esta estrategia no ha reducido el número de multiplicaciones necesarias: todavía se requiere 8 multiplicaciones matriciales para calcular las matrices C_{ij}, tal como en la multiplicación ordinaria. En este punto interviene la idea de Strassen. El define las matrices:

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{2,2})\,, & M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}\,, \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22})\,, & M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11})\,, \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}\,, & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})\,, \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})\,, \end{aligned} \tag{5}$$

que se usan para expresar los bloques C_{ij} en términos de las matrices M_k. Nótese que la definición de las matrices M_k requiere sólo 7 multiplicaciones matriciales. La expresión de los bloque C_{ij} en términos de las matrices M_k viene dada por:

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7\,, & C_{12} &= M_3 + M_5\,, \\ C_{21} &= M_2 + M_4\,, & C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Este proceso de particionamiento se puede iterar n-veces hasta que los bloques degeneran en simples números.

Ejercicio. Verifique que la matriz C de bloques C_{ij} dados por (5) y (6) coincide con AB.

Las implementaciones prácticas del algoritmo de Strassen recurren a la multiplicación ordinaria de matrices cuando los bloques M_k son suficientemente pequeños. El tamaõ de los bloques para los cuales el algoritmo de Strassen es más eficiente que la multiplicación ordinaria de matrices, depende de la implementación y del “hardware” específicos.

Ejercicio. Implemente recursivamente el algoritmo de Strassen. Verifique que su implementación opera correctamente. Compare estadísticamente el tiempo de ejecución del algoritmo de Strassen versus el tiempo de ejecución del algoritmo ordinario de multiplicación de matrices. Para este objetivo, genere matrices aleatorias que le permitan obtener –para cada n– conclusiones estadísticamente válidas.

Como se sabe, la complejidad de la multiplicación estandar de matrices es de orden $n^3 = n^{\log_2 8}$. Si ignoramos las adiciones involucradas, el algoritmo de Strassen reduce la complejidad a $n^{\log_2 7} \approx n^{2{,}807}$.

32. [1, p. 42, 23] La *traza* $\mathrm{tr}(A)$ de una matriz cuadrada A se define como la suma algebraica de los coeficientes de su diagonal principal. No se define la noción de traza para matrices no cuadradas. Si $A = [a_{ij}] \in M(m \times n, \mathbb{R})$, demuestre que $\mathrm{tr}(AA^T) = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

Zusatz 2003: ¿Puede Ud. obtener una fórmula similar para $\mathrm{tr}(AA^*)$ si $A = [a_{ij}] \in M(m \times n, \mathbb{C})$, donde $A^* = \left[a_{ij}^*\right]$ es la matriz *transpuesta conjugada* o *conjugada Hermitiana* de A definida por $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$?

33. [1, p. 54, 11] Calcule la matrices inversas, si acaso existen, de:

(a) $\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$; (b) (*Zusatz 2003*) $\begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

34. [1, p. 54, 12] (a) Dé un ejemplo de matrices $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ tales que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Demuestre o refute: Si $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si $AB = BA$.

35. [1, p. 55, 19] La ecuación $a^2 = 1$ tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}$. Determine a lo menos 8 (¡ocho!) matrices diferentes $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ que satisfagan la ecuación $A^2 = I$.

Zusatz 2005: Determine todas las soluciones de la ecuación $A^2 = -I$ en $M(n \times n, \mathbb{K})$ para $n = 2, 3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

36. [1, p. 55, 21] Una matriz real cuadrada A se dice *simétrica* si $A^T = A$ y *anti-simétrica* si $A^T = -A$. Demuestre que para cualquier matriz real cuadrada B: (a) BB^T y $B + B^T$ son simétricas. (b) $B - B^T$ es antisimétrica.

37. [1, p. 56, §1.5] Se dice que $E \in M(n \times n, \mathbb{C})$ es una *matriz elemental* si resulta de la matriz identidad $I_n \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mediante una única operación elemental de filas. Las operaciones elementales de filas son: (i) multiplicación de una fila por una constante; (ii) permutación de dos filas (diferentes); (iii) suma de un múltiplo de una fila a otra.

(a) Sean $E, A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, donde E es una matriz elemental. Demuestre que, entonces, EA es la matriz que resulta de A aplicando a A la misma operación elemental de filas que permite obtener E a partir de I.

(b) Determine las inversas de las matrices elementales. ¿Son nuevamente matrices elementales?

38. [1, p. 82, 22] Demuestre: (a) Si A es antisimétrica e invertible, A^{-1} también es antisimétrica.

(b) Si A, B son antisimétricas, A^T, $A + B$ y λA, λ un escalar, también son antisimétricas.

(c) Toda matriz cuadrada puede escribirse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Operadores Lineales y Matrices.

39. Sean E y F espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensiones $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ respectivamente. Sean $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B_F = \{f_1, \dots, f_m\}$ bases de E y F, respectivamente. Entonces, los vectores $u \in E$ y $v \in F$ se escriben de manera única en términos de las respectivas bases.

Utilizaremos la siguiente notación estándar:

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{B_E} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad v = v_1 f_1 + \cdots + v_m f_m = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}_{B_F} \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Se dice entonces que los u_i y los v_j son las *coordenadas* de los vectores u y v relativas a las bases B_E y B_F, respectivamente. No obstante que, en rigor, $u \in E$ y $\big[u_1, \ldots, u_n\big]^T \in \mathbb{K}^n$ (respectivamente, $v \in F$ y $\big[v_1, \ldots, v_m\big]^T \in \mathbb{K}^m$), se acostumbra a identificar:

$$u = \big[u_1, \ldots, u_n\big]^T, \qquad \text{(respectivamente,} \quad v = \big[v_1, \ldots, v_m\big]^T\text{)}. \tag{7}$$

Del contexto respectivo deberá inferirse cuál noción es la implicada.

Ejercicio. Verifique que las aplicaciones $u \mapsto \big[u_1, \ldots, u_n\big]^T$ y $v \mapsto \big[v_1, \ldots, v_m\big]^T$ constituyen sendos isomorfismos de E sobre $\mathbb{K}^n$ y de F sobre $\mathbb{K}^m$, respectivamente.

40. Representación matricial de una transformación lineal. Sea $T : E \to F$ una transformación u operador lineal Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n) \\ &= u_1 T(e_1) + \cdots + u_n T(e_n) \\ &= u_1\big(a_{11} f_1 + \cdots + a_{m,1} f_m\big) + \cdots + u_n\big(a_{1,n} f_1 + \cdots + a_{m,n} f_m\big) \\ &= \big(a_{11} u_1 + \cdots + a_{1,n} u_n\big) f_1 + \cdots + \big(a_{m,1} u_1 + \cdots + a_{m,n} u_n\big) f_m \end{aligned}$$

En particular se tiene:

$$T(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m\,, \qquad j = 1 : n\,. \tag{8}$$

Recurriendo al formalismo estándar de multiplicación de matrices, la expresión precedente puede escribirse en la forma:

$$T:\ u \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \equiv v \in F \qquad \forall u \in E\,. \tag{9}$$

De manera más compacta se acostumbra a escribir:

$$\begin{aligned} T : E &\ \to\ F \\ u &\ \mapsto\ v = A.u \end{aligned}$$

La matriz $A = \big[a_{ij}\big]_{m\times n}$ en (9) se denomina *matriz de la transformación lineal T relativa a las bases B_E y B_F* Nótese que los coeficientes a_{ij}, $i = 1 : m$ en la ecuación (8) corresponden a los coeficientes de la j-ésima columna de A.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo más 3, equipado con su base canónica $B := \{1, t, t^2, t^3\}$. Sea $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ el operador diferencial definido por:

$$D(p(t)) := p'(t) \equiv \frac{d}{dt} p(t), \qquad p(t) \in \mathcal{P}_3\,. \tag{10}$$

Un polinomio cualquiera $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y su derivada $p'(t) = b + 2ct + 3dt^2$, quedan representado entonces por los vectores $[a, b, c, d]^T$ y $[b, 2c, 3d, 0]^T$, respectivamente, y se tiene:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:[D]} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

La matriz $[D]$ es la matriz del operador D con respecto a la base canónica. Habitualmente se escribe simplemente D en lugar de $[D]$.

41. Cambio de base. La pregunta básica aquí será: ¿cómo cambian la representación de los vectores y las matrices que representan transformaciones lineales cuando se cambian las bases?
Sea E un espacio vectorial de dimensión n, equipado con dos bases $B := \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' := \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Entonces se puede expresar los vectores de una base con respecto a los de la otra, por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = p_{11}e'_1 + \cdots + p_{n,1}e'_n \\ e_2 = p_{12}e'_1 + \cdots + p_{n,2}e'_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ e_n = p_{1,n}e'_1 + \cdots + p_{n,n}e'_n \end{array}\right. \tag{12}$$

Consideremos ahora un vector $v \in E$ cuyas representaciones en términos de las bases B y B' son $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n$ y $v = v'_1e'_1 + \cdots + v'_ne'_n$, respectivamente. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} v &= v'_1e'_1 + \cdots + v'_ne'_n \\ &= v_1e_1 + \cdots + v_ne_n \\ &= v_1\big(p_{11}e'_1 + \cdots + p_{n,1}e'_n\big) + \cdots + v_n\big(p_{1,n}e'_1 + \cdots + p_{n,n}e'_n\big) \\ &= \big(p_{11}v_1 + \cdots + p_{1,n}v_n\big)e'_1 + \cdots + \big(p_{n,1}v_1 + \cdots + p_{n,n}v_n\big)e'_n \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} p_{11}v_1 + \cdots + p_{1,n}v_n \\ \vdots \\ p_{n,1}v_1 + \cdots + p_{n,n}v_n \end{bmatrix}_{B'} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}}_{=:P_{B'\leftarrow B}} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{B} \tag{13}$$

La matriz:

$$P \equiv P_{B'\leftarrow B} := \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix} \tag{14}$$

se denomina *matriz de transición* de la base B a la base B'. Evidentemente, la matriz $P \equiv P_{B'\leftarrow B}$ es invertible y se tiene:

$$P_{B\leftarrow B'} = P^{-1} := \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}^{-1} \tag{15}$$

que es la *matriz de transición* de la base B' a la base B.

42. 1) Considere una matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ como el operador lineal

$$\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \quad \text{definido por} \quad u \mapsto A.u \in \mathbb{C}^m\,, \quad u \in \mathbb{C}^n\,. \tag{16}$$

Supondremos que $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ están ambos equipado con el producto escalar estándar que, como se recordará, en $\mathbb{C}^m$ se define mediante:

$$\big\langle x, y\big\rangle_{\mathbb{C}^m} = x^*.y = \sum_{k=1}^{m} \overline{x_i}\, y_k\,, \qquad x = \big[x_1, \ldots, x_m\big]^T,\ y = \big[y_1, \ldots, y_m\big]^T \in \mathbb{C}^m\,. \tag{17}$$

Análogamente se define $\big\langle\cdot,\cdot\big\rangle_{\mathbb{C}^n}$ en $\mathbb{C}^n$. Entonces, evidentemente, se tiene:

$$\big\langle x, A.u\big\rangle_{\mathbb{C}^n} = x^*.A.u = (A^*.x)^*.u = \big\langle A^*.u, y\big\rangle_{\mathbb{C}^m}\,, \qquad x \in \mathbb{C}^m\,, \quad u \in \mathbb{C}^n\,. \tag{18}$$

Se observa que A^* representa de manera natural al llamado ***operador adjunto***:

$$\mathcal{A}^* : \mathbb{C}^n \leftarrow \mathbb{C}^m \quad \text{definido por} \quad \mathbb{C}^n \ni A^*.y \leftarrow y\,, \quad y \in \mathbb{C}^m\,. \tag{19}$$

Conviene advertir que la matriz adjunta Hermitiana $A^* \in M(n \times m, \mathbb{C})$ de una matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$, no tiene nada que ver con la matriz adjunta clásica $\mathrm{adj}(A) = \big[A_{ij}\big]$ que se define para matrices *cuadradas* $A \in M(m \times m, \mathbb{C})$, $A = \big[a_{ij}\big]$. Como se sabe, los coeficientes A_{ij} de $\mathrm{adj}(A)$ se definen mediante:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,, \tag{20}$$

donde M_{ij} es el determinate de la submatriz que se obtiene a partir de A eliminando su i-ésima fila y su j-ésima columna. El determinante M_{ij} se denomina clásicamente *menor adjunto* y el coeficiente A_{ij}, *cofactor*.

Ejercicio. (a) Demuestre que $\det(A) = \sum_{s=1}^{m} a_{rs}A_{rs} = \sum_{r=1}^{m} a_{rs}A_{rs}$ para todo $r, s \in \{1, m\}$.
(b) Demuestre que $A.\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A).A = \det(A)\, I_m$.

2) Nuestro objetivo ahora es generalizar levemente los conceptos anteriores. En particular queremos verificar que la noción de matriz adjunta Hermitiana depende de los productos escalares considerados. Notemos en primer lugar que si $U \in M(m\times m, \mathbb{C})$ es una matriz cuadrada *positiva definida*, entonces:

$$\big\langle u, v\big\rangle_U := u^*.U.v\,, \qquad u, v \in \mathbb{C}^m\,, \tag{21}$$

es un producto escalar en $\mathbb{C}^m$. Recuerde que la noción de producto escalar requiere que el producto de todo vector por sí mismo sea no negativo y que ese producto es nulo si y sólo si el vector es nulo.

Ejercicio. (a) Verifique que $\big\langle \cdot, \cdot\big\rangle_U$ es un producto escalar sobre $\mathbb{C}^m$.
(b) Discuta la afirmación: " $\big\langle \cdot, \cdot\big\rangle$ *es un producto escalar en* $\mathbb{C}^m$ *si y sólo si existe una matriz* $U \in M(m \times m, \mathbb{C})$ *positiva definida tal que* $\big\langle u, v\big\rangle = u^*.U.v$ *para todo* $u, v \in \mathbb{C}^m$."

Sea $V \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz positiva definida y defina el producto escalar:

$$\big\langle x, y\big\rangle_V := x^*.V.y\,, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n\,, \tag{22}$$

Ejercicio. Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ una matriz dada. (a) Demuestre: "*La ecuación:*

$$\big\langle x, A.v\big\rangle_V = \big\langle A^*.x, v\big\rangle_U\,, \qquad x \in \mathbb{C}^n\,, \quad v \in \mathbb{C}^m\,. \tag{23}$$

define unívocamente la matriz A^*."
(b) Determine una expresión para A^* en términos de las matrices A, U, V.

Espacios Vectoriales Asociados a una Matriz.

43. Ejercicio auxiliar: el algoritmo de Gram-Schmidt. El objetivo de este ejecicio es preparar conceptos y herramientas que pueden servir para abordar el ejercicio **45.**

Para mayor simplicidad, en este ejercicio auxiliar trabajaremos en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$. En general, en lugar de $\mathbb{C}^n$ se debería considerar cualquier espacio vectorial E de dimensión n, pero ello no agrega (mucho) a la discusión conceptual del tema que ahora nos ocupa, toda vez que E se identifica isomórficamente con $\mathbb{K}^n$ (ver ejercicio **39.**).

Como el lector recordará de sus cursos de Matemática, el *producto interno* de dos vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$ se define mediante:

$$u \cdot v \equiv u^* v = \big[\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\big] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \overline{u}_1 v_1 + \cdots + \overline{u}_n v_n \tag{24}$$

En particular:

$$\|u\| = (u^* u)^{1/2} = \big(|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2\big)^{1/2} \tag{25}$$

es la *norma Euclideana* del vector $u \in \mathbb{C}^n$.

Se dice que dos vectores $0 \neq u, v \in \mathbb{C}^n$ son *ortogonales* ssi $u^* v = v^* u = 0$. En este caso, a veces se anota $u \perp v$. Si además $\|u\| = \|v\| = 1$, se dice que u y v son *ortonormales*.

Sea $u_k \in \mathbb{C}^n$, $k = 1 : n$, un sistema de vectores l.i. (de modo que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$, pero ésto no es relevante aquí). Nuestro propósito es construir un sistema de vectores *ortogonales* $\{v_k\}_{k=1:n}$ a partir del sistema $\{u_k\}_{k=1:n}$. Comenzamos definiendo:

$$v_1 := u_1\,.$$

Luego, observamos que la *proyección* de u_2 sobre $v_1 = u_1$ viene dada por:

$$\left(\frac{v_1^*}{\|v_1\|}\,u_2\right)\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1^* u_2}{\|v_1\|^2}\,v_1 = \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1\,,$$

de modo que u_2 se puede escribir como:

$$u_2 = \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1 + \left(u_2 - \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1\right).$$

El vector $v_1 = u_1$ es ortogonal a $u_2 - \dfrac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1$. En efecto:

$$v_1^*\left(u_2 - \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1\right) = v_1^* u_2 - v_1^*\left(\frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1\right) = v_1^* u_2 - \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,(v_1^* v_1) = v_1^* u_2 - v_1^* u_2 = 0\,. \tag{26}$$

Sobre esta base definimos:

$$v_2 := u_2 - \frac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}\,v_1\,.$$

Nótese que en el segundo miembro de (26) el escalar $\dfrac{v_1^* u_2}{v_1^* v_1}$ afecta al *segundo* factor del segundo producto interno, lo que explica que en el tercer miembro dicho factor aparezca *sin* conjugar. Desde luego que una consideración de este tipo tiene relevancia en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. El caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es mucho más simple pues la conjugación Hermitiana se reduce a la transposición real.

Para definir v_3 se procede de manera análoga: basta restar a u_3 las proyecciones de este vector sobre v_1 y v_2:

$$v_3 := u_3 - \frac{v_1^* u_3}{v_1^* v_1}\,v_1 - \frac{v_2^* u_3}{v_2^* v_2}\,v_2\,.$$

Fácilmente se verifica que v_k es ortogonal a v_3, $k = 1, 2$. En efecto, para $k = 1, 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
v_k^* v_3 &= v_k^*\left(u_3 - \frac{v_1^* u_3}{v_1^* v_1}\,v_1 - \frac{v_2^* u_3}{v_2^* v_2}\,v_2\right)\\
&= v_k^* u_3 - v_k^*\left(\frac{v_1^* u_3}{v_1^* v_1}\,v_1\right) - v_k^*\left(\frac{v_2^* u_3}{v_2^* v_2}\,v_2\right)\\
&= v_k^* u_3 - \frac{v_1^* u_3}{v_1^* v_1}\,(v_k^* v_1) - \frac{v_2^* u_3}{v_2^* v_2}\,(v_k^* v_2)\\
&= v_k^* u_3 - v_k^* u_3\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

La definición inductiva de los vectores v_k es ahora evidente:

$$v_1 := u_1 \qquad v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_j^* u_k}{v_j^* v_j}\,v_j\,, \qquad k = 2 : n\,. \tag{27}$$

Ejercicio. Verifique que el sistema de vectores v_j, $j = 1 : n$, es ortogonal. El esquema (27) se denomina *algoritmo de Gram-Schmidt*. Para obtener un sistema *ortonormal* basta, obviamente, definir $V_k := v_k/\|v_k\|$, $k = 1 : n$.

44. Ejercicio auxiliar. Si $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}^n$ (donde E no necesariamente es un espacio vectorial sino un simple conjunto), se define:

$$E^\perp := \{u \in \mathbb{C}^n \,:\, u^* v = 0 \quad \forall v \in E\}\,, \qquad E^{\perp\perp} := \left\{u \in \mathbb{C}^n \,:\, u^* v = 0 \quad \forall v \in E^\perp\right\}\,,$$

Ejercicio. (a) Verifique que $E^{\perp}$ y $E^{\perp\perp}$ son espacios vectoriales denominados, respectivamente, *espacio ortogonal* y *espacio bi-ortogonal* engendrado por E.
(b) Demuestre que:

$$E^{\perp\perp} = \bigcap \{\, V \;:\; V \text{ es subespacio de } C^n \text{ tal que } E \subset V \} \;,$$

i.e., $E^{\perp\perp}$ es el subespacio más pequeño de $\mathbb{C}^n$ que contiene al conjunto E. Por consiguiente, $E^{\perp\perp}$ coincide con el subespacio de $\mathbb{C}^n$ *generado o engendrado* por el conjunto E, i.e., $E^{\perp\perp} = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E$.

45. Cuatro espacios muy distinguidos. Cf. [11, p. 150, 3.5] Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ equipados con sendas bases $\mathcal{B}^n$ y $\mathcal{B}^m$, respectivamente. Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ una matriz dada. Entonces las matrices A y A^* definen sendas aplicaciones lineales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ mediante:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbb{C}^m \\ \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\mathcal{A}^*} & \mathbb{C}^m \\ x & \longrightarrow & A.x \\ A^*.y & \longleftarrow & y \end{array} \tag{28}$$

donde los vectores x e y se expresan en términos de las bases $\mathcal{B}^n$ y $\mathcal{B}^m$, respectivamente.

Ejercicio. Las aplicaciones lineales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ definidas en (28) no necesariamente son inversas una de la otra. Determine condiciones necesarias y suficientes para que lo sean.

En el "lado izquierdo" de (28) se hallan los subespacios de $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} F(A) &= R(\mathcal{A}^*) \equiv \mathrm{range}(\mathcal{A}^*) = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; x = A^* y \,,\; y \in \mathbb{C}^m\} \subseteq \mathbb{C}^n \,, \\ N(A) &= \mathrm{kern}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; Ax = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n \,. \end{aligned}$$

(1) $F(A)$ es el *espacio de las filas* de la matriz A, i.e., el espacio generado por las filas de A escritas como vectores columna de dimensión n.
(2) $R(\mathcal{A}^*) \equiv \mathrm{range}(\mathcal{A}^*)$ es el *espacio-imagen* de la *aplicación o transformación lineal* $\mathcal{A}^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ representada por la matriz A^*.
(3) $N(A)$ es el *espacio nulo* de la matriz A.
(4) $\mathrm{kern}(\mathcal{A})$ es el *núcleo* de la *aplicación o transformación lineal* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ representada por la matriz A.

Análogamente, en el "lado derecho" de (28) se encuentran los subespacios de $\mathbb{C}^m$:

$$\begin{aligned} C(A) &= R(\mathcal{A}) \equiv \mathrm{range}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathbb{C}^m \;:\; y = Ax \,,\; x \in \mathbb{C}^n\} \subseteq \mathbb{C}^m \,, \\ \mathrm{N}(A^*) &= \mathrm{kern}(\mathcal{A}^*) = \{y \in \mathbb{C}^m \;:\; A^* y = 0\} \subseteq \mathbb{C}^m \,. \end{aligned}$$

(1) $C(A)$ es el *espacio de las columnas* de la matriz A, i.e., el espacio generado por las columnas de A.
(2) $R(\mathcal{A}) \equiv \mathrm{range}(\mathcal{A})$ es el *espacio-imagen* de la *aplicación o transformación lineal* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ representada por la matriz A.
(3) $N(A^*)$ es el *espacio nulo* de la matriz A^*.
(4) $\mathrm{kern}(\mathcal{A}^*)$ es el *núcleo* de la *aplicación o transformación lineal* $\mathcal{A}^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ representada por la matriz A^*.

El lector deberá asegurarse de distinguir claramente entre la *matriz* A (resp., A^*) y la *aplicación lineal* $\mathcal{A}$ (resp., $\mathcal{A}^*$).

Ejercicio. Sea $r = \mathrm{rank}\, A$. Verifique:
(a) $F(A) \cap N(A) = \{0\}$
(b) $F(A)^{\perp} := \{u \in \mathbb{C}^n \;:\; v.u = 0 \quad \forall \text{ fila } v \text{ de } A\} \subseteq N(A)$. ¡Observe que v es un vector fila!
(c) $\mathbb{C}^n = N(A) \oplus F(A)$, i.e. todo $x \in \mathbb{C}^n$ se puede escribir, *de manera única*, en la forma $x = u + v$ con $u \in N(A)$ y $v \in F(A)$, donde $u^* v = v^* u = 0$.
(d) $F(A)^{\perp} = N(A)$; $N(A)^{\perp} = F(A)$; $F(A) = F(A)^{\perp\perp}$; $N(A) = N(A)^{\perp\perp}$.
(e) $C(A) \cap N(A^*) = \{0\}$

(f) $C(A)^{\perp} := \{u \in \mathbb{C}^m \,:\, u^*.v = 0 \quad \forall$ columna v de $A\} \subseteq N(A^*)$.
(g) $\mathbb{C}^m = N(A^*) \oplus C(A)$, i.e. todo $y \in \mathbb{C}^m$ se puede escribir, *de manera única*, en la forma $y = u+v$ con $u \in N(A^*)$ y $v \in C(A)$, donde $u^*v = v^*u = 0$.
(h) $C(A)^{\perp} = N(A^*)$; $\quad N(A^*)^{\perp} = C(A)$; $\quad C(A) = C(A)^{\perp\perp}$; $\quad N(A^*) = N(A^*)^{\perp\perp}$.
(i) $\dim F(A) = \dim C(A) = r\,;\qquad \dim N(A) = n - r\,;\qquad \dim N(A^*) = m - r\,.$

46. Matrices escalonadas. [11, pp. 115-121] Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$. De sus cursos de Matemática el alumno conoce el algoritmo de Gauss que permite transformar A en una matriz escalonada U mediante operaciones de filas (incluyendo intercambio de filas). *Evidentemente, este proceso no altera ni el espacio de filas $F(A)$ ni el espacio de columnas $C(A)$ y, en consecuencia, tampoco altera los espacios nulos $N(A)$ y $N(A^*)$.*

Ejercicio. Fundamente la invariancia de los cuatro espacios fundamentales de la matriz A con respecto al algoritmo de escalonamiento de Gauss.

Consideremos una matriz $A \in M(4 \times 7, \mathbb{C})$. Mediante operaciones de filas A se podría transformar, por ejemplo, en una matriz escalonada U:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U\,, \tag{29}$$

En cada fila, el primer coeficiente no nulo hacia la derecha se denomina *pivote*. En el ejemplo, hay pivotes sólo en las tres primeras filas, en las columnas 1, 2 y 4, respectivamente (los pivotes son no nulos pero no son necesariamente 1). En este caso se tiene $\mathrm{rank}(A) = 3$, las columnas-pivote 1, 2 y 4 constituyen una base del espacio de columnas $C(A) \subset \mathbb{C}^4$ de A. Análogamente, las filas-pivote (consideradas como vectores-columna) 1, 2, y 3 constituyen una base del espacio de filas $F(A) \subset \mathbb{C}^7$ de A.

Aplicando el algoritmo de Gauss-Jordan se puede obtener la llamada *matriz escalonada reducida* R:

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,, \tag{30}$$

En la matriz escalonada reducida, todos los pivotes son 1 y en las columnas-pivote todos los coeficientes son 0, excepto los pivotes.

Ejercicio. (a) Verifique que $\dim F(A) = \dim C(A) = \mathrm{rank}(A)$.
(b) Implemente un algoritmo computacional que permita obtener la matriz escalonada reducida R a partir de la una matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ cualquiera. Tenga en cuenta intercambios de filas para una mayor estabilidad numérica de su algoritmo.
(c) Determine la complejidad de su algoritmo.

47. Considere las bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de $\mathbb{C}^3$ y $\mathbb{C}^5$, respectivamente. Considere, además, la transformación lineal $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^5$ determinada por: $T(u_1 + 2u_2 + 3u_3) = v_1 + v_3 + v_5$, $T(3u_2 - 2u_3) = v_2 - v_4$, y $T(-u_3) = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5$.

a) Obtenga la matriz A de la transformación lineal T con respecto a las bases indicadas. ¿Es invertible T, respectivamente, A? ¿Cuál es el rango $\mathrm{rank}\,A$ de la matriz A?

b) Determine $\mathrm{range}(T) := \big\{T(x) \,:\, x \in \mathbb{C}^3\big\} \subseteq \mathbb{C}^5$ y $\ker(T) := \big\{x \in \mathbb{C}^3 \,:\, T(x) = 0\big\} \subseteq \mathbb{C}^3$.

c) Determine el espacio de filas y el espacio nulo de A (ambos subespacios de $\mathbb{C}^3$ en este ejercicio). Obtenga las dimensiones de estos espacios. Verifique que son ortogonales y que su suma directa es $\mathbb{C}^3$.

(d) Determine el espacio de columnas y el espacio nulo *izquierdo* de A (ambos subespacios de $\mathbb{C}^5$ en este ejercicio). Obtenga las dimensiones de estos espacios. Verifique que son ortogonales y que su suma directa es $\mathbb{C}^5$.

48. Determine el espacio nulo $N(A)$ y el espacio de filas $F(A)$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix}$.

Solución: El espacio nulo $N(A)$ consiste de los vectores-columna $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s+2t \\ -s-2t \end{bmatrix}.$$

Luego, $N(A) = \big\{ [s, t, s+2t, -s-2t]^T \,:\, s, t \in \mathbb{R} \big\}$; evidentemente, $\dim_{\mathbb{R}} N(A) = 2$.
Por su parte, el espacio de filas $F(A)$ de la matriz A consiste de todos los vectores-fila que pueden escribirse como combinaciones lineales de las filas de A. Luego, si la matriz $\widetilde{A}$ se obtiene a partir de A mediante operaciones de filas, esto es, mediante combinaciones lineales de las filas de A, el espacio de filas no se altera, i.e.:

$$F(A) = F(\widetilde{A})\,, \quad \text{donde} \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el espacio de filas $F(A)$ de A es generado por la primera y la segunda fila de la matriz $\widetilde{A}$, i.e., $F(A) = \{ [s, 2s, t, s+t] \,:\, s, t \in \mathbb{R} \}$.
Nota: Usualmente los vectores del espacio de *filas* $F(A)$ una matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ se escriben como *vectores-columna*, de modo que la definición más común es $F(A) = \big\{ A^T x \,:\, x \in \mathbb{K}^m \big\} \subseteq \mathbb{K}^n$.
■

49. [11, p. 110, 19] Describa los espacios de columnas y los espacios de filas de las siguientes matrices:
(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$; (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(d) Calcule, si es posible, $\det(A\,B^T)$, $\det(A\,B)$, $\det(B^T\,C)$, $\det(B^T\,C^T)$.

50. [11, p. 111, 27] Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$. Examine la veracidad de las siguientes proposiciones. Para las verdaderas, proporcione demostraciones; para las falsas, exhiba contraejemplos y estudie condiciones adicionales que podrían hacerlas verdaderas.
(a) El conjunto de los vectores $b \in \mathbb{C}^m$ que *no* están en el espacio de columnas $R(A)$ de A es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^m$.
(b) Si el espacio de columnas $R(A)$ de A contiene sólo el vector 0, entonces A es la matriz nula.
(c) El espacio de columnas de $2A$ coincide con el espacio de columnas de A.
(d) El espacio de columnas de $A - I$ coincide con el espacio de columnas de A.

51. [11, p. 111, 28] Construya una matriz $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}$ tal que su espacio de columnas contenga los vectores $(1,1,0)^T$ y $(1,0,1)^T$ pero que *no* contenga el vector $(1,1,1)^T$

52. Determine el espacio nulo $N(A)$ y el espacio de filas $F(A)$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix}$.
¿Que relación puede Ud. establecer entre $N(A)$ y $F(A)$?

53. [11, p. 123, 21-27] Construya (si es posible) matrices reales A tales que:
(a) el espacio nulo $N(A)$ de A consiste de todas las combinaciones lineales de los vectores $(2,2,1,0)^T$ y $(3,1,0,1)^T$.
(b) el espacio nulo $N(A)$ de A consiste de todos los múltiplos del vector $(4,3,2,1)^T$.
(c) el espacio de columnas $R(A)$ de A contiene los vectores $(1,1,5)^T$ y $(0,3,1)^T$ y, simultáneamente, el espacio nulo $N(A)$ contiene el vector $(1,1,2)^T$.
(d) el espacio de columnas $R(A)$ de A contiene los vectores $(1,1,0)^T$ y $(0,1,1)^T$ y, simultáneamente,

el espacio nulo $N(A)$ contiene los vectores $(1,0,1)^T$ y $(0,0,1)^T$.
(e) el espacio de columnas $R(A)$ de A contiene el vector $(1,1,1)$ y, simultáneamente, el espacio nulo $N(A)$ es la recta de los múltiplos del vector $(1,1,1,1)$. (f) el espacio nulo $N(A)$ coincide con el espacio de columnas $R(A)$, *cuando* $A \in M(2\times 2,\mathbb{R})$. ¿Es ésto posible siquiera?
(g) el espacio nulo $N(A)$ coincide con el espacio de columnas $R(A)$, *cuando* $A \in M(3\times 3,\mathbb{R})$. ¿Es ésto posible siquiera? ¿Qué diferencia fundamental observa Ud. entre los casos (f) y (g)? (¡además, desde luego, que unas son matrices de 2×2 y las otras de 3×3!)

Ejercicios Misceláneos de Matrices y Determinantes.

54. [8, cf p. 28] *El anillo de los cuaterniones.* A partir de las matrices E, I del ejercicio **24.** defina ahora las siguientes cuatro matrices de orden cuatro:

$$e=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}, \qquad i=\begin{bmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{bmatrix}, \qquad j=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}, \qquad k=\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Defina:

$$Q := \left\{ \sum_{r=0}^{R}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{u=0}^{U} \alpha_{rstu} e^r i^s j^t k^u \ :\ \alpha_{rstu}\in\mathbb{R}\,,\ R,S,T,U\in\mathbb{N}_0 \right\}. \tag{32}$$

Considere el conjunto C equipado con la suma y la multiplicación usuales de matrices con $e^0 = i^0 = j^0 = k^0 = e$. Evidentemente $Q \subseteq M(4\times 4,\mathbb{R})$ y e es la matriz identidad de 4×4.
(a) Para $u,v\in Q$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ¿se cumple $\alpha u+\beta v\in Q$, $uv\in Q$?
(b) Determine Q en cuanto espacio vectorial real. En particular, ¿cuál es la dimensión del espacio vectorial real Q? *Hint*: Verifique que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$, $i^2 = j^2 = k^2 = -e$.
(c) ¿Qué forma específica tienen todas las matrices $A\in Q$.
(d) Para $w,z\in Q$ cualesquiera, ¿se cumple $wz = zw$?
(e) Si $z\in Q$ no es la matriz nula de $M(4\times 4,\mathbb{R})$, ¿puede Ud. determinar z^{-1}?

Los cuaterniones fueron inventados por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), célebre matemático y físico irlandés. Poseen numerosas e interesantes propiedades matemáticas que han sido aplicadas con éxito a variados problemas de la Física y la Ingeniería. Recientemente los cuaterniones han permitido optimizar ciertos métodos de la computación gráfica. ¡Explore la www a este respecto! Aún a riesgo de revelar la solución de las preguntas precedentes, [4] conviene notar que un cuaternión cualquiera se puede escribir en la forma:

$$q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k\,. \tag{33}$$

El número real $N(q) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ se llama *norma* del cuaternión q. El cuaternión:

$$q^* = \alpha e - \beta i - \gamma j - \delta k \tag{34}$$

se denomina *conjugado* de q. Es claro que $q^{**} = q$.
(f) Compruebe que $qq^* = q^*q = N(q)e$ y concluya que $q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\,q^*$, siempre que $q\neq 0$.
(g) Verifique que $N(pq) = N(p)N(q)$ para todo $p,q\in Q$.

55. Considere la matriz Hilbertiana $A = [1/(i+j-1)]_{1\le i,j\le n}\,,\ n\in\mathbb{N}\,.$

(i) Escriba un programa para MATLAB que calcule la matriz $B = \sum\limits_{k=1}^{p} \binom{p}{k}\binom{2p+1}{2k+1} A^{p-k}$. Los datos de entrada son, desde luego, $n,p\in\mathbb{N}$.
(ii) Escriba un programa para MATLAB que, dados $n,p\in\mathbb{N}$, calcule los determinantes de las matrices A y B.
(iii) Se dice que $\lambda\in\mathbb{C}$ es un *valor propio* de una matriz M de $n\times n$ ssi $\det(M-\lambda I_n) = 0$, donde I_n es la matriz identidad de $n\times n$. Escriba un programa para MATLAB que, dados $n,p\in\mathbb{N}$, con n

[4]Con el consiguiente riesgo de arruinar la aplicación del antiquísimo principio pedagógico (¡el gran Sócrates, 490-399 AC, ya lo aplicaba!) que privilegia el aprendizaje por el descubrimiento activo y personal, muy lejos por encima de las execrables pero lamentablemente populares “paltas”.

pequeño, calcule los valores propios de las matrices A y B. ¿Qué algoritmo usará para calcular las raíces de la ecuación algebraica resultante? Investigue en la literatura y fundamente adecuadamente el algoritmo que aplique.

56. Sea $A = [a_{ij}] \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Sea A_{ij} la matriz que resulta de A al eliminar su i-ésima fila y su j-ésima columna. Evidentemente, $A_{ij} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{K})$.

a) Demuestre que:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \text{para todo} \quad 1 \le i, j \le n \,.$$

Entonces el determinante $\det A$ de A puede definirse recursivamente mediante:

$$\det[a] = a \quad (n = 1)\,, \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}\,, \quad 2 \le n \in \mathbb{N}$$

para cualquier i ó j, $1 \le i, j \le n$. Estas fórmulas corresponden al llamado *desarrollo de Laplace* para el determinante. Nótese que $[a] \in M(1 \times 1, \mathbb{K})$. Para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, el algoritmo precedente conduce a las conocidas fórmulas:

$$\det[a_{11}] = a_{11}\,, \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}a_{23}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Observando las fórmulas precedentes varios astutos terráqueos del siglo XIX llegaron a conjeturar:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} \tag{det}$$

donde $\mathfrak{S}_n$ es el conjunto (¡es un grupo!) de las $n!$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\operatorname{sgn} \sigma$ es el signo de la permutación σ, i.e., $+1$ si el menor número de transposiciones (intercambio de pares adyacentes) necesarios para llegar de $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ es par, y -1 en caso que este menor número sea impar.

b) Demuestre la fórmula (det).

c) Demuestre que $\det(A\,B) = \det A \ \det B$, $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$.

d) Considere $\det A$ como función de las columnas (resp., de las filas) de la matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, i.e.

$$A \mapsto \det A = \det(a^1, \ldots, a^n) \quad (A \mapsto \det A = \det(a_1, \ldots, a_n))\,, \quad A \in M(n \times n, \mathbb{K})\,,$$

donde $a^j = j$-ésima columna de A, $1 \le j \le n$ (resp., donde $a_i = i$-ésima fila de A, $1 \le i \le n$).

Verifique que el funcional $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$:

(i) es multilineal, i.e., lineal en cada uno de sus argumentos,

(ii) es alternante, i.e., cambia de signo al intercambiar dos de sus argumentos,

(iii) está normalizado por $\det(I) = 1$, donde $I \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es la matriz identidad.

Demuestre que si

$$A \mapsto \phi(A) = \phi(a^1, \ldots, a^n) \quad (A \mapsto \phi(A) = \phi(a_n, \ldots, a_n))\,, \quad A \in M(n \times n, \mathbb{K})\,,$$

es una aplicación que posee las propiedades (i), (ii), (iii), entonces ϕ coincide con la función determinante.

(e) Escriba programas para MATLAB que permita calcular, *a bruta forza*, tanto mediante el desarrollo de Laplace como por medio de la fórmula combinatorial (det), determinantes de matrices de hasta 10×10. Determine las complejidades de sus programas. Más adelante veremos estrategias más astutas para calcular determinantes.

57. [7, 0.4.5-6, p. 13] Demuestre:
a) $\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ para toda matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$.
b) El rango “rank” de la matriz resultante de eliminar filas y/o columnas de una matriz dada, no puede ser mayor que el rango de la matriz original.
c) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - k \leq \operatorname{rank} A\,B \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$, $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$, $B \in M(k \times n, \mathbb{K})$.
d) $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$, $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$.
e) (Frobenius) $\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(ABC)$, $A \in M(m \times k, \mathbb{K})$, $B \in M(k \times p, \mathbb{K})$, $C \in M(p \times n, \mathbb{K})$.
f) $\operatorname{rank} A^* = \operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A$, $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$
g) Si $A \in M(m \times m, \mathbb{K})$ y $C \in M(n \times n, \mathbb{K})$ son no singulares, y $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$, entonces $\operatorname{rank}(A\,B) = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}(B\,C) = \operatorname{rank}(A\,B\,C)$.
h) Si $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$, entonces $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ si y sólo si existen matrices no singulares $X \in M(m \times m, \mathbb{K})$ $Y \in M(n \times n, \mathbb{K})$ tales que $B = XAY$.
i) $\operatorname{rank}(A^* A) = \operatorname{rank} A$, $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$
j) Si $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ tiene rango $\operatorname{rank} A = k$, entonces existen matrices $X \in M(m \times k, \mathbb{K})$, $Y \in M(k \times n, \mathbb{K})$ y $B \in M(k \times k, \mathbb{K})$, con B no singular, tales que $A = XBY$. En particular, toda matriz A de rango $\operatorname{rank} A = 1$ puede escribirse siempre en la forma $A = xy^T$ con $x \in \mathbb{K}^m$ e $y \in \mathbb{K}^n$ (téngase presente la convención de considerar los vectores como vectores columna).

58. ¿Para qué valores de las constantes c y d la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix}$ tiene rango 2?

Solución: Para mayor comodidad escribamos en este ejercicio los vectores de $\mathbb{R}^5$ como vectores-fila. Sea $f_k = [f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3}, f_{k,4}, f_{k,5}] \in \mathbb{R}^3$ la k-ésima fila de la matriz dada, $k = 1, 2, 3$. Puesto que $f_{1,1} = 1$, $f_{1,2} = 2$ y $f_{2,1} = f_{2,2} = f_{3,1} = f_{3,2} = 0$, es claro que $f_1 \notin E_{23} := \langle f_2, f_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ = espacio vectorial real generado por f_2 y f_3. Luego, para que la matriz dada tenga rango 2 es necesario y suficiente que f_2 y f_3 sean l.d. Para que ésto ocurra, en vista de $f_{3,1} = 0$, es necesario y suficiente que $c = 0$ y $d = 2$. ■

59. [7, 0.5, p. 14] Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Demuestre que las siguientes propiedades son equivalentes:
a) A es no singular, i.e., $A\,x = 0$ si y sólo si $x = 0 \in \mathbb{K}^n$.
b) A^{-1} existe, i.e., A es invertible: $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$, donde $I \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es la identidad.
c) $\operatorname{rank} A = n$.
d) Las filas de A son linealmente independientes.
e) Las columnas de A son linealmente independientes.
f) $\det A \neq 0$.
g) La dimensión del espacio $\operatorname{range} A = \{Ax \,:\, x \in \mathbb{K}^n\}$ es n.
h) La dimensión del núcleo $\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n \,:\, Ax = 0\}$ es n.

Las matrices no singulares de dimensión n forman un grupo llamado *grupo lineal general* que se denota por usualmente por $GL(n, \mathbb{K})$.

60. Demuestre o refute: la inversa de una matriz triangular superior cuadrada también es una matriz triangular superior cuadrada cuyos coeficientes de la diagonal son los recíprocos de los coeficientes de la diagonal de la matriz original.

61. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Considere A *particionada* en la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{ii} \in M(n_i \times n_i, \mathbb{K}) \quad (i = 1, 2) \quad \text{con} \quad n_1 + n_2 = n\,.$$

Suponga que A, A_{11} y A_{22} son invertibles. Demuestre:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}[A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}]^{-1} \\ [A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1} \end{bmatrix},$$

donde se supone que las submatrices $[\cdots]$ también son invertibles.

62. Las matrices de Vandermonde $V_{n\times n}$ de $n\times n$ se definen como $V = \left[x_i^j\right]_{1\le i\le n}^{0\le j\le n-1}$ o como la transpuesta de esta matriz, donde $x_i\in\mathbb{C}$, $1\le i\le n$. Demuestre o refute: $\det V_{n\times n} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Determine una condición general que garantice que $V_{n\times n}$ es invertible. Escriba un mini-programa de MATLAB que permita calcular el referido determinante.

63. [8, cf. p. 58, ejemplo 4] Demuestre o refute:

$$\det\begin{bmatrix} a+x_1 & a & \dots & a \\ a & a+x_2 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a & a & \dots & a+x_n \end{bmatrix} = x_1x_2\dots x_n\left(1+\frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2}+\dots+\frac{a}{x_n}\right).$$

64. Demuestre o refute: Toda matriz triangular *unitaria* es diagonal.

65. Sea $A\in M(m\times m,\mathbb{C})$ una matriz *hermitiana*. Un *vector propio* de A es un vector no nulo $x\in\mathbb{C}^m$ tal que $A.x=\lambda x$ para algún escalar $\lambda\in\mathbb{C}$; tal escalar λ se llama entonces *valor propio* de A. Demuestre o refute:
a) todos los valores propios de A son reales,
b) si x e y son vectores propios correspondientes a valores propios distintos de A, entonces x e y son ortogonales.

66. Sea $S\in M(m\times m,\mathbb{C})$ una matriz *anti-hermitiana* (*skew-hermitian*), i.e., $S^*=-S$. Demuestre o refute:
a) Los valores propios de S son números imaginarios (puros).
b) $I-S$ es no singular.
c) La llamada *transformada de Cayley* de S, definida mediante $Q=(I-S)^{-1}(I+S)$, es una matriz unitaria. *Nota*: esta transformación es el análogo matricial de la transformación de Möbius $s\mapsto\dfrac{1+s}{1-s}$ del Análisis Complejo, que transforma el semi-plano izquierdo de $\mathbb{C}$ sobre el disco unitario $\mathbb{D}$.

67. Ref.: Eric W. Weisstein. "Hadamard Matrix." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.html`

Una matriz de Hadamard es un tipo de matriz cuadrada cuyos coeficientes son todos ±1. Estas matrices tienen muchas aplicaciones en las ciencias de la computación, por ejemplo, en la construcción de códigos correctores de error, en particular, el código Reed-Müller.

Esta noción fue inventada por Sylvester (1867) bajo el nombre de *pavimento analagmático*, [5] 26 años antes que Hadamard (1893) estudiara el concepto. En una matriz de Hadamard, si se colocan *contigüamente* dos filas (resp., dos columnas) cualesquiera, la mitad de las celdas *contigüas* tienen el mismo signo y la otra mitad el signo contrario. Nótese, además, que una de las filas (resp., columnas) correspondiente a un *borde* de la matriz de Hadamard consiste solamente de $+1$'s. En cada una de las demás filas (resp., columnas), la mitad de las celdas corresponde a $+1$ y la otra mitad a -1.

A veces, las matrices de Hadamard se consideran como una representación de un *embaldosado* donde, usualmente, los $+1$'s corresponden a baldosas negras y los -1's a baldosas blancas.

Una definición equivalente (¡más matemática!) de las matrices de Hadamard H_n viene dada por la ecuación:

$$H_n\,H_n^T = nI_n\,, \tag{35}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n, $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicio. Intente resolver computacionalmente esta ecuación matricial para algunos valores pequeños de n. La idea a explorar es, para un determinado n, construir *todas* las matrices cuadradas de ±1's, decidiendo en cada caso si satisface o no la ecuación (35). Evidentemente se trata de un

[5] Del gr. $\dot{\alpha}\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}$ = cambio. Literalmente: sin cambio. En Matemáticas se dice que una estructura es *analagmática* si es invariante con respecto a inversiones.

método de *bruta forza* del cual no puede esperarse que sirva para valores grandes de n. Examine hasta qué n puede llegar Ud. y explore alternativas algorítmicas que permitan mejorar el método. ¿Cuál sería la complejidad de su algoritmo en función de n?

El *problema de Hadamard del máximo determinante* consiste en hallar una matriz $H_n = [a_{ij}]$ de orden n con $a_{ij} \in \mathbb{C}$ y $|a_{ij}| \leq 1$ cuyo determinante, en valor absoluto, es máximo.

Teorema 1. (Brenner, 1972)[6] *Una matriz de Hadamard de orden n resuelve el problema de Hadamard del máximo determinante de orden n. El máximo valor del determinante correspondiente es $n^{n/2}$.*

Ejercicio. Explore computacionalmente la validez de este teorema.

En general, las matrices de Hadamard de un determinado orden no son únicas.

Teorema 2. (Sloane; Wolfram, 2002)[7] *El número N_{4n} de las matrices de Hadamard de orden $4n$ viene dado por:*

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	...
$4n$	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*	*28*	...
N_{4n}	*1*	*1*	*1*	*5*	*3*	*60*	*487*	...

Ejercicio. Verifique computacionalmente la validez de este teorema y estudie la posibilidad de extender la tabla precedente a valores de n más grandes.

Se sabe que si H es una matriz de Hadamard de dimensión $m > 2$, entonces m debe ser un múltiplo de 4, pero todavía (hasta el año 2005) no se sabe si para *todo* múltiplo de 4 existe una matriz de Hadamard.

Conjetura 1. *Para todo n divisible por 4 existen matrices de Hadamard H_n.*

Hacia 1993 esta conjetura había sido verificada hasta $n < 428$.[8] Sawade (1985) construyó H_{268}.[9] En el año 2004 Kharaghani y Tayfeh-Rezaie construyeron una matriz H_{428},[10] dejando el menor orden desconocido en 668. No obstante, la demostración de la conjetura general continúa siendo (hacia 2005) un importante problema abierto de la teoría de códigos.

Ejercicio. Explore la validez de la Conjetura 1.

El siguiente algoritmo recursivo permite construir matrices de Hadamard para cualquier dimensión $m = 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$:

$$H_1 = [1] \, , \qquad H_{2^{k+1}} = \begin{bmatrix} H_{2^k} & H_{2^k} \\ -H_{2^k} & H_{2^k} \end{bmatrix} .$$

Por ejemplo:

$$H_2 = \begin{bmatrix} [1] & [1] \\ [-1] & [1] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \qquad H_4 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[6] Brenner, J. and Cummings, L. The Hadamard Maximum Determinant Problem. *Amer. Math. Monthly* **79**, 626-630, 1972.

[7] Sloane, N. J. A. Sequences A007299/M3736, A046116, and A074070. In *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`. Wolfram, S. *A New Kind of Science.* Champaign, IL: Wolfram Media, p. 1073, 2002.

[8] van Lint, J. H. and Wilson, R. M. *A Course in Combinatorics. rm New York: Cambridge University Press, 1993.*

[9] Sawade, K. A Hadamard Matrix of Order-268. *Graphs Combinatorics* **1**, 185-187, 1985.

[10] Kharaghani, H. and Tayfeh-Rezaie, B. *A Hadamard Matrix of Order 428.* Preprint, 2004. `http://math.ipm.ac.ir/tayfeh-r/papersandpreprints/h428.pdf`.

Más generalmente, si se conoce las matrices de Hadamard H_m y H_n, entonces la matriz de Hadamard H_{mn} se puede construir reemplazando todos los $+1$'s de H_m por H_n y los -1's por $-H_n$, y luego eliminando los delimitadores de las matrices $\pm H_n$ internas.

Ejercicio. Verifique que los algoritmos descritos generan matrices que satisfacen la ecuación (35), de modo que éstas son efectivamente matrices de Hadamard. Inversamente, verifique que para $n \leq 100$ las matrices de Hadamard de orden $n = 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92,$ y 100 no se pueden construir por esta vía a partir de matrices de Hadamard de orden menor.

68. Estudie el problema de diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Estudiaremos el problema en $\mathbb{R}$. Primeramente determinemos el polinomio característico de A:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(3-\lambda)\,.$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$.
Los vectores propios $x \in \mathbb{R}^3$ asociados al valor propio $\lambda = 0$ vienen dados, entonces, por la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,, \quad \text{i.e.:} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\,.$$

Luego, el espacio propio E_0 asociado a $\lambda = 0$ viene dado por $E_0 = \left\{[s, t, -s-t]^T \,:\, s, t \in \mathbb{R}\right\}$. Claramente $\dim E_0 = 2$.
Análogamente, los vectores $x \in \mathbb{R}^3$ asociados al valor propio $\lambda = 0$ vienen dados por la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Luego, la última igualdad se reduce a $x_1 = x_3$ y $x_2 = x_3$. Por consiguiente, el espacio propio E_3 asociado a $\lambda = 3$ viene dado por $E_3 = \left\{[t, t, t]^T \,:\, t \in \mathbb{R}\right\}$. Claramente $\dim E_3 = 1$.
Seleccionando tres vectores l.i. cualesquiera de los espacios propios E_0 y E_3 (obviamente, dos de E_0 y uno de E_3) se puede construir una matriz P que diagonalice A. En efecto, eligiendo:

$$P := \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ -s_1 - t_1 & -s_2 - t_2 & t_3 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \det P = 3t_3(s_1 t_2 - s_2 t_1) \neq 0\,, \quad s_i, t_i \in \mathbb{R}\,,$$

se tiene:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} s_2 t_3 + 2t_2 t_3 & -2s_2 t_3 - t_2 t_3 & s_2 t_3 - t_2 t_3 \\ -s_1 t_3 - 2t_1 t_3 & 2s_1 t_3 + t_1 t_3 & -s_1 t_3 + t_1 t_3 \\ -s_2 t_1 + s_1 t_2 & -s_2 t_1 + s_1 t_2 & -s_2 t_1 + s_1 t_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz P verifica entonces:

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que es la forma diagonal que se desea obtener.
Nota: Los resultados precedentes fueron obtenidos con *Mathematica* (TM). Cualquier solución particular (seleccionando los parámetros s_i, t_i de modo que $\det P \neq 0$) es aceptable. ■

69. Considere el operador de transposición T sobre el espacio $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de las matrices de 2×2 con cueficientes reales.
(a) ¿Es T una transformación lineal?

(b) ¿Se puede expresar el operador T mediante una matriz? En otras palabras, ¿existe una matriz M_T tal que $A^T = M_T A$ para toda matriz $A \in M(2\times 2,\mathbb{R})$?

Solución: (a) Evidentemente, $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y todo $A, B \in M(2\times 2,\mathbb{R})$. Luego, el operador T es una transformación lineal sobre $M(2\times 2,\mathbb{R})$.

(b) Si se considera $M_T \in M(2\times 2,\mathbb{R})$, la respuesta debe ser negativa. En efecto, si $M_T = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces debría cumplirse $A^T = M_T A$, i.e., $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ua+vc & ub+vd \\ wa+xc & wb+xd \end{bmatrix}$, i.e.:

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \det\left(\begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} \right) = -(bc-ad)^2\,.$$

Cuando el determinante de este sistema es distinto de cero se tiene:

$$u = \frac{ad-c^2}{ad-bc}\,, \quad v = \frac{a(-b+c)}{ad-bc}\,, \quad w = \frac{d(b-c)}{ad-bc}\,, \quad x = \frac{ad-b^2}{ad-bc}\,.$$

Luego, u, v, w, x son funciones *no constantes* de los coeficientes a, b, c, d de la matriz A. Dado que los coeficientes a, b, c, d deben recorrer libremente el conjunto $\mathbb{R}$, no puede existir una (*única*) matriz $M_T \in M(n\times n,\mathbb{R})$ tal que $A^T = M_T A$ para *toda* matriz $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$.

No obstante, si se identifica $M(2\times 2,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ mediante el isomorfismo "trivial" $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to [a, b, c, d]^T$, es inmediato que hay una matriz de permutación P que realiza la transposición matricial. En efecto:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A^T$$

Luego, con la identificación aludida, la transposición queda representada por la matriz de permutación $P \in M(4\times 4,\mathbb{R})$ precedente.

70. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(v_1) = w_1 - 3w_3$, $T(v_2) = w_1 - 2w_2$, $T(v_3) = 2w_2 - 3w_3$. Determine la matriz A_T de la transformación T con respecto a las bases B_1 y B_2 de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) &= \alpha(w_1 - 3w_3) + \beta(w_1 - 2w_2) + \gamma(2w_2 - 3w_3) \\ &= (\alpha+\beta)w_1 + (-2\beta + 2\gamma)w_2 + (-3\alpha - 3\gamma)w_3 \end{aligned}\,.$$

Luego, $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. ■

71. Sean E, F espacios vectoriales de dimensiones finitas n, m respectivamente sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $L(E, F)$ el conjunto de todas las aplicaciones (funciones) lineales $\phi : E \to F$.
(a) Defina una estructura de espacio vectorial sobre $L(E, F)$.
(b) Determine la dimensión de $L(E, F)$.

Solución: (a) La definición usual es:

$$(a\varphi + b\psi)(x) := a\varphi(x) + b\psi(x)\,, \quad \forall x \in E\,, \quad \forall \varphi, \psi \in L(E,F)\,, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}\,. \tag{36}$$

También como es usual, se hace notar que las operaciones lineales en el segundo miembro de (36) se efectúan en el espacio vectorial F, de modo $a\varphi + b\psi : E \to F$ está bien definida. La verificación que $a\varphi + b\psi \in L(E, F)$ es inmediata.

(b) Consideremos bases $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de E y F, respectivamente. Para $\lambda = 1, \ldots, n$ y $\sigma = 1, \ldots, m$ definamos las aplicaciones $\varphi^\lambda_\sigma : E \to F$ mediante:

$$\varphi^\lambda_\sigma(x_\nu) := \begin{cases} y_\sigma\,, & \text{si } \lambda = \nu\,, \\ 0\,, & \text{si } \lambda \neq \nu\,, \end{cases} \qquad \varphi^\lambda_\sigma\left(\sum_{\nu=1}^{n} a^\nu x_\nu\right) := \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu \varphi^\lambda_\sigma(x_\nu) = a^\lambda y_\sigma\,, \quad a^\nu \in \mathbb{K}\,.$$

Obviamente φ^λ_σ es lineal, de modo que $\varphi^\lambda_\sigma \in L(E, F)$ para todo $\lambda = 1, \ldots, n$ y $\sigma = 1, \ldots, m$.

Sea ahora $\varphi \in L(E, F)$ una aplicación lineal cualquiera. La expresión $\varphi(x_\lambda) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta^\mu_\lambda y_\mu$, $\lambda = 1, \ldots, n$, define unívocamente los mn coeficientes β^μ_λ. Entonces, para todo $\lambda = 1, \ldots, n$, se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\varphi - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \beta^\mu_\nu \varphi^\nu_\mu\right)(x_\lambda) &= \varphi(x_\lambda) - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} \beta^\mu_\nu \varphi^\nu_\mu(x_\lambda) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \beta^\mu_\lambda y_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} \beta^\mu_\lambda y_\mu = 0\,.\end{aligned}$$

Luego, $\varphi = \sum\limits_{\mu=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta^\mu_\nu \varphi^\nu_\mu$, i.e., el sistema de funciones φ^ν_μ genera el espacio vectorial $L(E, F)$.

La verificación que el sistema de aplicaciones lineales φ^ν_μ es linealmente independiente sigue el mismo esquema. En efecto, suponiendo que $\sum\limits_{\mu=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma^\mu_\nu \varphi^\nu_\mu = 0$ para ciertos coeficientes $\gamma^\mu_\nu \in \mathbb{K}$, entonces para cada x_λ se tiene $0 = \sum\limits_{\mu=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma^\mu_\nu \varphi^\nu_\mu(x_\lambda) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \gamma^\mu_\lambda y_\mu$, de donde resulta $\gamma^\mu_\lambda = 0$ para todo $\mu = 1, \ldots, m$ pues los y_μ son l.i. Luego, $\gamma^\mu_\lambda = 0$ para todo $\mu = 1, \ldots, m$ y todo $\lambda = 1, \ldots, n$, i.e., el sistema de funciones $\varphi^n_\mu u$ es l.i.

Por consiguiente, $\{\varphi^\nu_\mu \,:\, \mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n\}$ es una base de $L(E, F)$ y

$$\dim L(E, F) = mn = \dim E \times \dim F\,. \tag{37}$$

Notas: (i) Ejercicio resuelto en la clase del 15.04.2003.

(ii) La base $\{\varphi^\nu_\mu\}$ de $L(E, F)$ se llama *base inducida* por las bases de E y F.

(iii) Una demostración alternativa del resultado (37) recurre al isomorfismo "trivial" entre $L(E, F)$ y $M(m \times n, \mathbb{K})$. En efecto, la aplicación lineal φ^ν_μ, con referencia a las bases $\{x_\nu\}^n_{\nu=1}$ e $\{y_\mu\}^m_{\mu=1}$ de E y F respectivamente, queda representada por la matriz $M^\nu_\mu = \left[\delta^\mu_i \delta^j_\nu\right]_{i,j} \in M(m \times n, \mathbb{K})$, donde δ^l_k es el conocido símbolo de Kronecker. Esta identificación define, evidentemente, un isomorfismo $L(E, F) \to M(m \times n, \mathbb{K})$. Dado que las matrices $\left[\delta^\mu_i \delta^j_\nu\right]_{i,j}$ constituyen obviamente una base del espacio vectorial $M(m \times n, \mathbb{K})$, se tiene $\dim L(E, F) = \dim M(m \times n, \mathbb{K}) = mn$. ■

72. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 1. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.) (i) Sea T un tetraedro regular de lado a. Calcule la longitud de una altura de T. ¿Qué ángulo forman dos alturas cualesquiera de T?
(ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ dos vectores de norma unitaria y sea α el ángulo que subtienden. Demuestre que $\|x - y\| = 2|\sin(\alpha/2)|$.

73. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 2. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.) Sea A una matriz ortogonal de 3×3 con coeficientes reales y determinante positivo. Demuestre o refute: $1 \in \sigma(A)$, donde $\sigma(A)$ denota el spectrum o conjunto de los valores propios de A. Suponga que $-1 \in \sigma(A)$. Determine $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $\det(s\,I - A) = (s - \lambda_1)\,(s - \lambda_2)\,(s - \lambda_3)$.

74. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 3. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.) Sean

$$E_1 = \left\{ x = [x_1, x_2, x_3]^T \ : \ 5x_2 - 12x_3 = 0 \right\} , \quad E_2 = \left\{ x = [x_1, x_2, x_3]^T \ : \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 15 \right\} ,$$

dos planos en $\mathbb{R}^3$ y $G = \left\{ \tau\,[2, -1, 1]^T \ : \ \tau \in \mathbb{R} \right\}$ una recta. Determine todas las esferas S tangentes a E_1 y E_2 cuyos centros yacen en la recta G.

75. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 4. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.) Considere el conjunto $M = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq k \leq 11\}$.

(i) Encuentre todas las permutaciones π de M tales que $(3)\pi = 10$, $(10)\pi = 3$, $(7)\pi = 7$, y poseen exactamente 3 órbitas.

(ii) Sea σ una permutación de M con exactamente 5 órbitas. Sea $\zeta = (2, 5, 11) = (2, 5)(2, 11)$. Demuestre o refute: el número de órbitas de $\sigma\zeta$ es 5, 3 ó 7.

76. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 5. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.)

Considere la permutación $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Sean $e_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T, \ldots, e_5 = [0, 0, 0, 0, 1]^T$, los vectores unitarios de $\mathbb{R}^5$. Sea A una matriz definida por $A.e_i = e_{(i)\pi}$. Determine el polinomio característico de A.

77. (Ref.: Prof. Dr. H. Wimmer, Nachklausur zur Einführung in die lineare Algebra, Aufgabe 6. Mathematisches Institut, Universität Würzburg, April 2003.) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Demuestre o refute: $\big\langle a \times b \, , \, (b \times c) \times (c \times a) \big\rangle = (\det[a|b|c])^2$.

Teoría Espectral Elemental de Matrices.

78. [10, p. 397, ex. 7] Sea $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ y $f(x) = (x^T C x)/(x^T x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demuestre que $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto estacionario de f si (¿y sólo si?) $\widetilde{x}$ es un vector propio de $\frac{1}{2}(C + C^T)$ con valor propio $f(\widetilde{x})$.

79. [6, p. 305, exs. 7, 8] Encuentre (si es que existen) matrices unitarias que diagonalizan las matrices:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} , \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} .$$

80. [7, p. 37, ex. 4] Considere la matriz diagonal por bloques $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ con $A_{ii} \in M(m_i \times m_i, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$. Demuestre que los valores propios de A son los valores propios de A_{11} junto con los valores propios de A_{22}.

81. [7, p. 42, ex. 2] Considere matrices $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ y $A \in M(n \times m, \mathbb{C})$. Demuestre que $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, donde tr es el operador de *traza*. Use este resultado para probar que para $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ cualquiera y $S \in M(n \times n, \mathbb{C})$ no singular, se tiene $\operatorname{tr} S^{-1}AS = \operatorname{tr} A$. Se dice que la transformación $A \mapsto S^{-1}AS$ es una *transformación de similitud* y que la matriz $S^{-1}AS$ es *similar* a la matriz A. El resultado precedente dice, entonces, que la traza es un *invariante de similitud*. El determinante es, obviamente, un invariante de similitud (*Why, dear student?*).

82. [7, p. 43, ex. 4] Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ y sea A_i la submatriz (principal, i.e, su diagonal esta contenida en la diagonal de A) de A obtenida al eliminar la fila i y la columna i de A, $1 \leq i \leq n$. Sean p_A y p_{A_i} los polinomios característicos de las matrices A y A_i, respectivamente. Demuestre: $\dfrac{d}{dt} p_A(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{A_i}(t)$.

83. [7, p. 43, ex. 7] Mediante puro pensamiento (ayudándose quizás de papel y lápiz), obtenga el polinomio característico de matrices tridiagonales de $n \times n$ de la forma

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

84. [8, p. 60, §3.1] Sea $A = [a_{ij}] \in M(n \times n, \mathbb{K})$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ son opciones populares. Como el lector sabe, el polinomio $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $I \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es la matriz identidad, es el llamado *polinomio característico* de la matriz A cuyo estudio da origen a la *teoría espectral de matrices* y a los *métodos espectrales*, que juegan un papel crucial en la Ingeniería.

(a) Es fácil ver que $\deg p_A = n$ y:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \operatorname{tr} A \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A\,, \tag{38}$$

esto es, que los coeficientes de λ^n, λ^{n-1} y λ^0 son 1, $-\operatorname{tr} A$ y $\det A$, respectivamente. *Demuestre estos resultados.*

(b) Como se sabe, dos matrices $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ se dicen *similares* o *semejantes* si existe una matriz invertible $X \in M(n \times n, \mathbb{K})$ tal que $A = X^{-1}BX$; entonces se anotará $A \sim B$. Evidentemente, la relación de semejanza o similitud de matrices $\sim$ es una relación de equivalencia que particiona el conjuto $M(n \times n, \mathbb{K})$ en clases de equivalencia. *Demuestre este resultado.*

Un problema importante de la teoría de matrices consiste en caracterizar estas clases de equivalencia.

(c) El rango y los polinomios característicos de matrices similares coinciden. En particular, las matrices similares tienen valores propios, trazas, y determinantes iguales. La aserciones recíprocas no son válidas; para verificar ésto, considere, por ejemplo, las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Demuestre todos estos resultados.*

(d) (Teorema de Cayley-Hamilton) [11] [12] Toda matriz es raíz de su polinomio característico, esto es, $p_A(A) = 0$. *Demuestre este resultado.*

(e) El *polinomio mínimo* $m_A(\lambda)$ de una matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ se define como el polinomio de menor grado y coeficiente principal (el coeficiente de λ^n) igual a 1, para el cual la matriz A es una raíz. El polinomio mínimo $m_A(\lambda)$ es único y divide (exactamente) al polinomio característico $p_A(\lambda)$. *Demuestre este resultado.*

(f) Si las *raíces características* de $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, esto es, los *valores propios* de A, son *todas* distintas entre sí, entonces $p_A(\lambda) = (-1)^n m_A(\lambda)$. *Demuestre este resultado.*

(g) Demuestre que los valores propios de A^p son $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A y $p \in \mathbb{N}$, sin importar si los λ_i's son distintos. Verifique, además, que este resultado también es válido para $p \in \mathbb{Z}$ cuando A es no singular.

85. [11, p. 301, exs. 17, 18, 20] Verdadero o falso, dando sólidas razones:

(a) Una matriz invertible no puede ser similar a una matriz singular.

---

[11] Arthur Cayley (1821-1895) Né à Richmond (Angleterre) de marchands anglais établis à Saint-Petersbourg, Cayley a vecu en Russie jusqu'à l'âge de huit ans. Il passa les années 1838-1849 au collège de la Trinité à Cambridge, étudiant les mathématiques et le droit et fut appelé au barreau, en 1849. Depuis 1863, il détint la chaire de mathématiques pures de Cambridge. [3, Tome II, p. 435]

[12] William Rowan Hamilton (1805-1865) Né à Dublin (Irlande), Hamilton entra, en 1823, au collège de la Trinité à Dublin et fut nommé en1827, alors qu'il návait obtenu aucun diplôme, astronome ruyal de l'observatoire de Dunsink. En 1832, il devint membre de lÁcadémie royale irlandaise et fut son président de 1837 á 1845. [3, Tome II, p. 441]

(b) Una matriz simétrica no puede ser similar a una matriz no simétrica.
(c) A no puede ser similar a $-A$, a menos que $A = 0$.
(d) A no puede ser similar a $A + I$.
(e) Si B es invertible, entonces AB y BA tienen los mismos valores propios.
(f) Si A es similar a B, entonces A^2 es similar a A^2.
(g) A^2 y B^2 pueden ser similares (aún) cuando A y B no lo son.
(h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ es similar a $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ pero $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ no es similar a $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
(j) Si en una matriz A permutamos sus filas 1 y 2 y luego permutamos las columnas 1 y 2, entonces los valores propios permanecen inalterados.

86. Encuentre los polinomios característicos, los polinomios minimales, los valores propios y los vectores propios de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

87. [7, p. 43, ex. 7] Mediante puro pensamiento (ayudándose quizás de papel y lápiz), obtenga los polinomios característicos y minimal de las matrices tridiagonales T_k de $k \times k$ de (39).

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Una matriz de la forma de la matriz $J_k(\lambda)$ en (39) se llama *célula* o *bloque de Jordan*.

Formas Canónicas (Schur y Jordan).

88. El Teorema de Triangularización Unitaria de Schur. [7, p. 79, §2.3]

Teorema 3. (Schur). [13] *Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_1$ en cualquier orden prescrito. Entonces existe una matriz unitaria $U \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tal que $U^*AU = T = [t_{ij}]$ es una matriz triangular superior con diagonal $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. En otras palabras, toda matriz cuadrada A es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior cuyos coeficientes en la diagonal principal son los valores propios de A en un orden que se puede prescribir. Si $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ y si todos los valores propios de A son reales, entonces U puede elegirse de modo que sea real y ortogonal.*

Demo. 0) La demostración es algorítmica y recurre a una sucesión de reducciones del mismo tipo.
1) Sea $x^{(1)}$ un vector propio *normalizado* de A asociado al valor propio λ_1. El vector no nulo $x^{(1)}$ puede ser extendido a una base $x^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$ de $\mathbb{C}^n$. Aplicando el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt a esta base se obtiene una base ortonormal $x^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, \ldots, z^{(n)}$

[13] Issaï Schur (1875-1941) Né à Mogilev (Russie), J. Schur fréquenta l'école secondaire de Libau (Lettonie) et fit ses études universitaires à Berlin. Il enseigna à l'Université de Bonn (1911-1916), puis à Université de Berlin jusqu'en 1935, quand il dut abandonner sa chaire. À Berlin il fut professeur de Don Roberto Frucht, ancien professeur à l'Université Technique Federico Santa María, à Valparaíso, Chili. Il se réfugia, en 1939, en Palestine. [3, Tome II, p. 454]

de $\mathbb{C}^n$. Ahora interpretamos estos vectores ortonormales, ordenados de izquierda a derecha, como las columnas de una matriz unitaria (*why?*) U_1. Puesto que la primera columna de AU_1 es $\lambda_1 x_1$, un cálculo rápido (*¡hágalo please!*) revela que

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} .$$

2) La matriz $A_1 \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tiene valores propios $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ (*Why? This is very important!*). Sea $x^{(2)} \in \mathbb{C}^{n-1}$ un vector propio *normalizado* de A_1 correspondiente al valor propio λ_2, y repitamos el mismo procedimiento descrito en 1) de modo que obtenemos una matriz unitaria $U_2 \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{C})$ tal que:

$$U_2^* A_1 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} .$$

Sea $V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$. Entonces las matrices V_2 y $U_1 V_2$ son unitarias y:

$$V_2^* U_1^* A U_1 V_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} ,$$

donde la matriz $A_2 \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tiene valores propios $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ (*Why? This is again very important!*).

3) Continuando este proceso de reducción generamos matrices $U_i \in M((n-i+1) \times (n-i+1), \mathbb{C})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y matrices unitarias V_i, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. La matriz $U = U_1 V_2 V_3 \ldots V_{n-1}$ es unitaria y $U^* A U$ tiene la forma deseada. (*¡Verifique todo ésto!*).

4) Si todos los valores propios de $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ (note que ahora el cuerpo es $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{C}$ como en los pasos previos) son reales, entonces los vectores propios correspondientes pueden ser elegidos reales y todos los pasos precedentes se pueden llevar a cabo en aritmética real. (*¡Verifique todo ésto!*). □

Observación. 1) En la demostración del Teorema **3**. se puede reemplazar la frase "triangular superior" por "triangular inferior" y el resultado sigue siendo válido. Obviamente se obtendría una matriz unitaria U diferente.

2) Las matrices U y T del Teorema **3**. no son únicas. No solamente los coeficientes de la diagonal principal de T (los valores propios de A) pueden aparecer en cualquier orden sino que, además, los coeficientes sobre la diagonal principal pueden ser muy diferentes. Por ejemplo, las siguientes matrices T_1 y T_2 son unitariamente equivalentes (similares) por intermedio de la matriz unitaria U:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} , \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} , \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

En general, muchas matrices triangulares superiores bien diferentes pueden estar en la misma clase de equivalencia de similitud unitaria. *Verifique estas aserciones.*

Una versión estrictamente real del Teorema **3**. está contenida en el siguiente

Teorema 4. *Si $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, entonces existe una matriz ortogonal $Q \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que:*

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}) , \quad 1 \le k \le n , \tag{40}$$

donde cada A_i es una matriz real de 1×1 (cuyo único coeficiente es un valor propio real de A) o bien una matriz real de 2×2 con un par de valores propios complejos conjugados (i.e., no reales) de A. Los bloques diagonales pueden estar en cualquier orden prescrito.

En general, no se debe esperar que se pueda reducir *toda* matriz real A a una matriz triangular superior real mediante transformaciones de similitud reales (ni menos mediante similitudes ortogonales reales) pues si ello fuera *siempre* posible, los coeficientes de la diagonal principal, que tendrían que ser los valores propios de A, serían siempre reales y, como se sabe, ello no es así: los valores propios de matrices reales pueden ser no reales.

Tarea. Demuestre el Teorema **4**. modificando convenientemente la demostración del Teorema **3**., como se sugiere a continuación. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio real de la matriz real A, entonces existe un correspondiente vector propio real que se puede usar para "desinflar" A tal como en la demostración del Teorema **3**. Si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ es un valor propio no real de A y si $Ax = \lambda x$, $x = u + iv \neq 0$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$, demuestre que $Au = \alpha u - \beta v$, $Av = \alpha v + \beta u$, $A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$, y que $\{x, \overline{x}\}$ es un conjunto linealmente independiente. Deduzca que $\{u, v\}$ también es un conjunto linealmente independiente y aplique el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener un conjunto ortonormal real $\{w, z\}$. Si Q_1 es una matriz ortogonal real cuyas primeras dos columnas son w y z, demuestre que

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & \widetilde{A} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{A} \in M((n-2) \times (n-2), \mathbb{R}),$$

de modo que se puede "desinflar" dos columnas de A de un solo "paragüazo". Observe que los bloques diagonales A_i correspondientes a cada valor propio real o a cada par de valor propio no reales complejos conjugados, se pueden ordenar a voluntad. Note, además, que los bloques diagonales A_i no tienen nada que ver conceptualmente con los bloques de Jordan que se estudian en otro ejercicio de esta tarea.

Tarea. Programe la triangularización unitaria de Schur, tanto para el caso complejo como para el caso real. Verifique sus programas con algunos ejemplos no triviales.

89. Una Extensión del Teorema de Triangularización Unitaria de Schur [7, p. 90] La siguiente extensión del Teorema de Schur juega un papel importante en la obtención de la forma canónica de Jordan de una matriz cuadrada dada.

Teorema 5. *Supóngase que $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tiene valores propios λ_i con multiplicidades n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, y que los λ_i's son distintos de a pares. Entonces A es similar a una matriz de la forma*

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_k \end{bmatrix}$$

donde $T_i \in M(n_i \times n_i, \mathbb{C})$ es una matriz triangular superior cuyos coeficientes de la diagonal son todos iguales a λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Si $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ y todos los valores propios de A son reales, entonces el resultado sigue siendo válido y las matrices de similitud pueden escogerse reales.

Demo. 1) Primeramente apliquemos el Teorema de Schur **3**. para exhibir una similitud unitaria de A con una matriz triangular superior $T = [t_{rs}]$ y supongamos que hemos ordenado los valores propios de A a lo largo de la diagonal principal de T de modo que $t_{11} = \lambda_1, t_{22} = \lambda_2, \ldots, t_{nn} = \lambda_n$.

2) A continuación aplicamos a T una sucesión de transformaciones de similitud simples (no unitarias) que introducen los 0's por sobre la diagonal principal, sin alterar la diagonal principal ni la estructura triangular superior de T.

3) Sea $E_{rs} = [\delta_{rs}] \in M(n \times n, \mathbb{C})$, donde δ_{rs} es el conocido símbolo de Kronecker, i.e., E_{rs} es la matriz de $n \times n$ cuyos coeficientes son todos nulos excepto aquel de la r-ésima fila y la s-ésima columna, que es 1. Nótese que para $r \neq s$ y α cualquier escalar, la matriz $I + \alpha E_{rs}$ es no singular y $(I + \alpha E_{rs})^{-1} = I - \alpha E_{rs}$.

4) Por otro lado, un cálculo directo demuestra que la transformación de similitud inducida por $I + \alpha E_{rs}$ con $r < s$ viene dada por:

$$\begin{aligned}\widetilde{T} &= (I+\alpha E_{rs})^{-1} T\,(I+\alpha E_{rs}) = (I-\alpha E_{rs})\,T\,(I+\alpha E_{rs}) \\ &= \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,s-1} & \alpha t_{1,r}+t_{1,s} & t_{1,s+1} & \cdots & t_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & t_{r-1,s-1} & \alpha t_{r-1,r}+t_{r-1,s} & t_{r-1,s+1} & \cdots & t_{r-1,n} \\ 0 & \cdots & t_{r,s-1} & \alpha(t_{r,r}-t_{s,s})+t_{r,s} & t_{r,s+1}-\alpha t_{s,s+1} & \cdots & t_{r,n}-\alpha t_{s,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & t_{s-1,s-1} & t_{s-1,s} & t_{s-1,s+1} & \cdots & t_{s-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{s,s} & t_{s,s+1} & \cdots & t_{s,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{n,n} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nótese que $\widetilde{T}$ es una matris triangular superior idéntica a T excepto por los coeficientes $t_{i,j}$ con (i) $i = r$ y $j = r, r+1, \dots, n$, i.e., los coeficientes de la fila r a partir de la columna s; y (ii) $j = s$ e $i = 1, 2, \dots, r-1$, i.e., los coeficientes de la columna s por encima de la fila r. El coeficiente $t_{r,s}$ de T queda reemplazado por $\widetilde{t}_{r,s} = t_{r,s} + \alpha(t_{r,r} - t_{s,s})$. Luego, si $t_{r,r} \neq t_{s,s}$, $\widetilde{t}_{r,s}$ se puede hacer 0 eligiendo $\alpha = -t_{r,s}/(t_{r,r} - t_{s,s})$ *sin alterar de ningún modo la estructura relevante*.

5) Ahora consideremos la siguiente sucesión de entradas de la matriz T: $(n-1, n)$; $(n-2, n-1)$, $(n-2, n)$; $(n-3, n-2)$, $(n-3, n-1)$, $(n-3, n)$; $(n-4, n-3)$, $(n-4, n-2)$, $(n-4, n-1)$, $(n-4, n)$; ... Hagamos 0 cada una de estas entradas mediante las similitudes indicadas en 4), si $t_{r,r} \neq t_{s,s}$. Nótese que ninguna entrada previamente anulada resulta perturbada por las transformaciones discutidas. La matriz resultante es similar a A y tiene la forma deseada. □

Tarea. Estudie la posibilidad de automatizar el algoritmo implícito en la demostración del Teorema **5**. Verifique la operación de su programa con algunos ejemplos concretos.

90. La Forma Canónica de Jordan. [7, p. 121, §3.1] Una *matriz de Jordan* $J \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es una suma directa de bloques de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}, \qquad J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \tag{41}$$

con $J_{n_i}(\lambda_i) \in M(n_i \times n_i, \mathbb{C})$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, donde los órdenes n_i *pueden* ser iguales y los λ_i no necesariamente son diferentes. Nótese que $J_{n_i}(\lambda_i)$ es una matriz cuadrada bidiagonal superior cuyos coeficientes son todos nulos excepto los de la diagonal principal y los de la primera diagonal superior, que son iguales al valor propio λ_i y a 1, respectivamente. Si $n_i = 1$ para todo i y $k = n$, entonces J es diagonal.

Si para algún bloque de Jordan $J_{n_i}(\lambda_i)$ se tiene $n_i > 1$, entonces J_{n_i} no sólo no es diagonal sino que ni siquiera es diagonalizable y, por ende, J no puede ser diagonalizable. En efecto, si $J_{n_i}(\lambda_i)$ fuera diagonalizable, i.e., si existiera una matriz invertible S tal que $J_{n_i} = S \Lambda S^{-1}$ con Λ diagonal, entonces necesariamente $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i, \dots, \lambda_i) = \lambda_i I$ (*Why, dear student?*). Luego, $J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I = S\Lambda S^{-1} - \lambda_i I = S\,(\Lambda - \lambda_i I)\,S^{-1} = 0$, lo que no puede ser válido si $n_i > 1$ (*Why, dear student?*).

El principal resultado de esta sección es que *toda matriz compleja es similar a una matriz de Jordan que es esencialmente única*. Llegaremos a esta conclusión en tres pasos:

Paso 1. Observar que toda matriz compleja es similar a una matriz triangular superior cuyos valores propios aparecen en la diagonal principal en un orden prescrito. Este es el Teorema de Triangularización de Schur **3**.

Paso 2. Demostrar que toda matriz triangular superior, mediante transformaciones de similitud puede ser llevada a la forma de una matriz diagonal por bloques en la cual los coeficientes de la diagonal principal de cada bloque diagonal individual son iguales (como el bloque de Jordan $J_k(\lambda)$ en (41)) Este es el Teorema **5**.

Paso 3. Finalmente, demostrar que toda matriz triangular superior cuyos coeficientes en la diagonal principal son todos iguales es similar a una suma directa de bloques de Jordan del tipo $J_k(\lambda)$ de (41).

Lema 1. *Sea $k \geq 1$ y considere el bloque de Jordan*

$$J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Entonces, $J_k^T(0)\, J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{bmatrix}$ y $J_k(0)^p = 0$ si $p \geq k$. Además, $J_k(0)\, e_{i+1} = e_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $[I - J_k(0)^p\, J_k(0)]\; x = \left(x^T e_1\right) e_1$, donde $I_{k-1} \in M((k-1) \times (k-1), \mathbb{C})$ es la matriz identidad, e_i es el i-ésimo vector de la base standard de $\mathbb{C}^n$, y $x \in \mathbb{C}^n$.

Demo. Cálculos directos. *Por favor, ¡hágalos!* □

Teorema 6. *Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ estrictamente triangular superior (i.e., A tiene diagonal nula). Entonces existe una matriz no singular $S \in M(n \times n, \mathbb{C})$ y existen enteros $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1$ con $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ tales que:*

$$A = S \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_m}(0) \end{bmatrix} S^{-1} . \tag{42}$$

Si A es real, entonces la matriz S puede escogerse real.

Demo. A) Si $n = 1$, $A = [0]$ y el resultado es trivial. Ahora procedemos por inducción con respecto a n. Suponemos que $n > 1$ y que el resultado ya ha sido probado para todas las matrices estrictamente triangulares superiores de orden menor que n.

B) Particionemos A en la forma $A = \begin{bmatrix} 0 & a^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, donde $a \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $A_1 \in M(n \times n, \mathbb{C})$ es estrictamente triangular superior. Por la hipótesis inductiva, existe una matriz no singular $S_1 \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{C})$ tal que $S_1^{-1} A_1 S_1$ tiene la forma deseada (42), esto es:

$$S_1^{-1} A_1 S_1 = \begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k_1} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} , \qquad J = \begin{bmatrix} J_{k_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{k_s}(0) \end{bmatrix} , \tag{43}$$

donde $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s \geq 1$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n - 1$, $J_{k_1} \equiv J_{k_1}(0)$, $J \in M((n-1-k_1) \times (n-1-k_1), \mathbb{C})$. Nótese que (por la hipótesis inductiva) ningún bloque diagonal de Jordan tiene orden mayor que k_1, de modo que $J^{k_1} = 0$ por el Lema **1**.

C) Un simple cálculo (*¡hágalo por favor!*) demuestra que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^T S_1 \\ 0 & S_1^{-1} A_1 S - 1 \end{bmatrix} . \tag{44}$$

D) La submatriz $a^T S_1 \in M(1 \times (n-1), \mathbb{C})$ en (44) se puede particionar en la forma $a^T S_1 = \begin{bmatrix} a_1^T \; a_2^T \end{bmatrix}$, donde $a_1 \in \mathbb{C}^{k_1}$ y $a_2 \in \mathbb{C}^{n-1-k_1}$, de modo que (en vista de (43)) podemos escribir (44) en la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} . \tag{45}$$

(*Por favor, verifíquelo!*).

E) Ahora consideremos la siguiente relación de similitud (*que le rogamos encarecidamente verificar*) de la matriz del lado derecho de (45):

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_1^T J_{k_1}^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1^T J_{k_1}^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T \left(I - J_{k_1}^T J_{k_1}\right) & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left(a_1^T e_1\right) e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \tag{46}$$

donde hemos usado la identidad $\left(I - J_{k_1}^T J_{k_1}\right) x = \left(x^T e_1\right) e_1$ del Lema **1**. Hay dos posibilidades que examinar dependiendo de si se cumple $a_1^T e_1 = 0$ o no.

F.1) Si $a_1^T e_1 \neq 0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \left(1 / a_1^T e_1\right) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 / a_1^T e_1\right) I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \left(a_1^T e_1\right) e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^T e_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & a_1^T e_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{J} & e_1 a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix} \tag{47}$$

donde $\widetilde{J} = \begin{bmatrix} 0 & e_1^T \\ 0 & J_{k_1} \end{bmatrix} = J_{k_1+1}(0)$ es un bloque de Jordan de orden $k_1 + 1$ con diagonal principal nula. (*¡Verifique (47)!*).

F.2) Usando la propiedad $\widetilde{J} e_{i+1} = e_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k_1$ se puede demostrar *fácilmente* (*Please, do it! Never believe the word "fácilmente".*) que:

$$\begin{bmatrix} I & e_2 a_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{J} & e_1 a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -e_2 a_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{J} & -\widetilde{J} e_2 a_2^T + e_1 a_2^T + e_2 a_2^T J \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & e_2 a_2^T J \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

y, luego, se puede calcular recursivamente la sucesión de similitudes:

$$\begin{bmatrix} I & e_{i+1} a_2^T J^{i-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{J} & e_i a_2^T J^{i-1} \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -e_{i+1} a_2^T J^{i-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{J} & e_{i+1} a_2^T J^i \\ 0 & J \end{bmatrix} , \qquad i = 2, 3, \ldots$$

Puesto que $J^{k_1} = 0$, observamos que después de a lo más k_1 pasos en esta sucesión de similitudes los términos fuera de la diagonal se harán nulos.

Concluímos entonces que A es similar a la matriz $\begin{bmatrix} \widetilde{J} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$, que es una matriz estrictamente triangular superior como se quería probar. (*¡Verifique todo ésto!*).

G) Si $a_1^T e_1 = 0$, entonces (46) muestra que:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2^T \\ 0 & J_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} J_{k1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^T \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \tag{48}$$

donde "$\sim$" denota la relación de similitud de matrices. Nótese que la segunda de las similitudes de (48) es una similitud de permutaciones, esto es, la matriz S involucrada es una matriz de permutaciones de filas, resp. de columnas.

Por la hipótesis inductiva existe una matriz no singular $S_2 \in M((n-k_1) \times (n-k_1), \mathbb{C})$ tal que:

$$S_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix} S_2 = \widehat{J} \in M((n-k_1) \times (n-k_1), \mathbb{C})$$

es una matriz de Jordan con diagonal principal nula. Luego, la matriz (48) y, por lo tanto A, es similar a la matriz $\begin{bmatrix} J_{k_1} & 0 \\ 0 & \widehat{J} \end{bmatrix}$, que es una matriz de Jordan de la forma requerida, excepto posiblemente por el hecho de que los bloques de Jordan diagonales pudieran no estar ordenados según orden no creciente. En tal caso, un bloque de similitudes de permutación producirá la forma deseada. (*¡Verifique todo ésto!*).

H) Finalmente, observamos que si A es real, entonces todas las similitudes utilizadas en esta demostración se pueden elegir reales, de modo que A es similar a la matriz de Jordan requerida mediante similitudes reales. (*¡Verifique ésto!*). Ello concluye la demostración. $\square$

91. Sea $J = J(\lambda) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ un bloque de Jordan con valor propio *lambda*.
(a) Calcule J^k para $k = 2, 3, 4$ (sólo tres potencias).
(b) Calcule $p(A)$, donde p es un polinomio cualquiera.
(c) Calcule $f(A)$, donde f es un función entera. En particular, calcule e^A.
(d) Calcule $r(A)$, donde r es una función racional para la cual λ no es un polo.

92. *¡Muy importante!*. El cálculo de la forma normal de Jordan de una matriz no es un problema muy popular en la Computación Científica pues los algoritmos disponibles no son muy estables. Investigue si MATLAB puede obtener la forma de Jordan de una matriz dada. Experimente con matrices "mal condicionadas". Investigue en la red para ver si otros paquetes "standard" resuelven mejor este problema y, adema'as, para ver si en alguna parte hay otro "software" confiable que resuelva mejor este problema.

Normas de vectores y matrices.

93. *Las p-normas de vectores*. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^m$. Para $1 \leq p \in \mathbb{R}$ se define

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} , \qquad x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m .$$

Para $p = \infty$ se define

$$||x||_\infty := \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| , \qquad x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m .$$

Evidentemente, $||x||_p \geq 0$ y $||\lambda x||_p = |\lambda| ||x||_p$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, todo $x \in \mathbb{C}^m$ y todo $1 \leq p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En lo que sigue se demuestra que $||\cdot||_p$ satisface la desigualdad triangular, de modo que efectivamente son normas, $1 \leq p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. El resultado clave es (a) que debe Ud. demostrar.

(a) Sean $0 \leq u, v \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p, q \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$uv = \inf \left\{ t^p \frac{u^p}{p} + t^{-q} \frac{v^q}{q} \, : \, t > 0 \right\} .$$

(b) *La desigualdad de Hölder*. Sean $1 \leq p, q \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^q \right)^{1/q} , \qquad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{C}^m .$$

Nótese que para $p = 1/2$ la desigualdad de Hölder se reduce a la conocida desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Demostración. Sobre la base del resultado (a) se tiene para $x, y \in \mathbb{C}^m$:

$$|x_k y_k| \leq t^p \frac{|x_k|^p}{p} + t^{-q} \frac{|y_k|^q}{q} , \quad t > 0 , \quad 1 \leq k \leq m .$$

Sumando estas m desigualdades resulta:

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| \le t^p \, \frac{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p}{p} + t^{-q} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} |y_k|^q}{q} \,, \quad t > 0 \,.$$

Tomando el *infimum* sobre $t > 0$ en el lado derecho de la desigualdad precedente y en vista del resultado (a) — con $u = (\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{1/p}$ y $v = (\sum_{k=1}^{m} |y_k|^q)^{1/q}$ — se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| \le \text{ínf} \left\{ t^p \, \frac{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p}{p} + t^{-q} \, \frac{\sum_{k=1}^{m} |y_k|^q}{q} \; : \; t > 0 \right\} = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

■

(c) *La desigualdad de Minkowski*. Sea $1 \le p \in \mathbb{R}$ y también para $p = \infty$ se tiene:

$$||x + y||_p \le ||x||_p + ||y||_p \,, \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{C}^m \,.$$

Demostración. Para $p = 1$ la desigualdad precedente es simplemente un caso especial de la desigualdad triangular usual en $\mathbb{R}$. Para $x + y = 0$ la desigualdad es evidente. Luego, sin pérdida de generalidad (s.P.d.G.) se puede suponer $1 \le p \in \mathbb{R}$ y $x + y \neq 0$. Defínase $q := p/(p-1)$, de modo que se cumple $(1/p) + (1/q) = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder se deduce entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\le \sum_{k=1}^{m} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{m} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \right)^{(p-1)/p} .
\end{aligned}$$

Considerando el primero y el último término de la cadena de desigualdades precedentes y, puesto que $x + y \neq 0$, dividiendo por $(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p)^{(p-1)/p}$ se obtiene:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \right)^{1-(p-1)/p} \le \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p \right)^{1/p} \,,$$

que es la desigualdad triangular planteada. ■

94. [7, §5.6, p. 290] (a) *Normas matriciales*. Se dice que una función $\|\cdot\| : M(m \times n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ es una *norma matricial* si y sólo si para todo $A, B \in M(m \times n, \mathbb{C})$ se cumplen los siguientes axiomas:

(i) $\|A\| \ge 0$ y $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$, (ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

(iii) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$, (iv) $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$.

Nota. Algunos autores, como G.H. Golub y C.F. Van Loan [5, (2.3.4), p. 55], no exigen el axioma (iv).

(b) En vista de que $\|A^2\| = \|A\,A\| \le \|A\| \, \|A\| = \|A\|^2$, para toda matriz no nula A con $A^2 = A$ se tiene $\|A\| \ge 1$. En particular $\|I\| \ge 1$.

(c) Si A es invertible, $I = A\,A^{-1}$, de modo que $\|I\| = \|A\,A^{-1}\| \le \|A\| \, \|A^{-1}\|$ y en consecuencia $\|A^{-1}\| \ge \|I\| \,/\, \|A\|$.

(d) Sea $A = (a_{ij}) = [a_1 | a_2 | \ldots | a_n] \in M(m \times n, \mathbb{C})$, donde $a_j \in \mathbb{C}^m$ denota la j-ésima columna de A. Las siguientes son algunas normas matriciales populares:

(1) La norma l_1 de la matriz A considerada como un vector en $\mathbb{C}^{mn}$: $||A||_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} ||a_j||_1$.

(2) La norma l_2 de la matriz A considerada como un vector en $\mathbb{C}^{mn}$: $||A||_2 = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

Nótese que $||A||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} ||a_j||_2^2$. Esta norma se denomina, a veces, norma de *Frobenius*, o norma de *Schur*, o norma de *Hilbert-Schmidt*.

(3) La norma del *máximo de las normas l_1 de las columnas*: $\|A\|_C = \max_{1\le j\le n} ||A^j||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$, donde A^j denota la j-ésima columna de A.

(4) La norma del *máximo de las normas l_1 de filas*: $\|A\|_F = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

TAREA: *Verifique que las precedentes son efectivamente normas de matrices que poseen las propiedades que se indican.*

Desarrollo de (3). Sólo verificaremos *submultiplicatividad* de esta norma. Sean $A \in M(m \times p, \mathbb{C})$ y $B \in M(p \times n, \mathbb{C})$, de modo que $AB \in M(m \times n, \mathbb{C})$. Note que las matrices no son cuadradas pero el producto AB queda bien definido. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \|AB\|_C &= \max \left\| \left[A.B^1 | A.B^2 | \ldots | A.B^n \right] \right\|_1 \\ &= \max \left\{ \left\| A.B^1 \right\|_1, \left\| A.B^2 \right\|_1, \ldots, \|A.B^n\|_1 \right\} . \end{aligned} \tag{49}$$

Ahora bien, para cada término $\left\| A.B^j \right\|_1$ en (49) se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| A.B^j \right\|_1 &= \left\| b_{1,j} A^1 + b_{2,j} A^2 + \cdots + b_{n,j} A^n \right\|_1 \\ &\le |b_{1,j}| \left\| A^1 \right\|_1 + |b_{2,j}| \left\| A^2 \right\|_1 + \cdots + |b_{n,j}| \left\| A^n \right\|_1 \\ &\le \max \left\{ \left\| A^1 \right\|_1, \left\| A^2 \right\|_1, \ldots, \|A^n\|_1 \right\} (|b_{1,j}| + |b_{2,j}| + \cdots + |b_{n,j}|) \\ &= \|A\|_C \left\| B^j \right\|_1 . \end{aligned} \tag{50}$$

De (49) y (50) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \|AB\|_C &\le \max \left\{ \|A\|_C \left\| B^1 \right\|_1, \|A\|_C \left\| B^2 \right\|_1, \ldots, \|A\|_C \|B^n\|_1 \right\} \\ &= \|A\|_C \max \left\{ \left\| B^1 \right\|_1, \left\| B^2 \right\|_1, \ldots, \|B^n\|_1 \right\} \\ &= \|A\|_C \|B\|_C . \end{aligned} \tag{51}$$

■

95. Como Ud. recordará la norma de Frobenius o de Hilbert-Schmidt de una matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, se define como $||A||_F = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$. Verifique que esta norma matricial posee la propiedad de la submutiplicatividad, i.e., $||AB||_F \le ||A||_F \, ||B||_F$, $\forall A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$.

Solución: Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. Escribamos $A_i = [a_{i,1}, a_{i,2}]^T \in \mathbb{C}^2$, $i = 1, 2$, y $B^j = [b_{1,j}, b_{2,j}]^T \in \mathbb{C}^2$, $j = 1, 2$. Entonces $AB = \begin{bmatrix} A_1^T B^1 & A_1^T B^2 \\ A_2^T B^1 & A_2^T B^2 \end{bmatrix}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz usual para la norma $|| \cdot ||_2$ de $\mathbb{C}^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} ||AB||_F^2 &= |A_1^T B^1|^2 + |A_1^T B^2|^2 + |A_2^T B^1|^2 + |A_2^T B^2|^2 \\ &\le ||A_1||_2^2 \, ||B^1||_2^2 + ||A_1||_2^2 \, ||B^2||_2^2 + ||A_2||_2^2 \, ||B^1||_2^2 + ||A_2||_2^2 \, ||B^2||_2^2 \\ &= \left(||A_1||_2^2 + ||A_2||_2^2 \right) \cdot \left(||B^1||_2^2 + ||B^2||_2^2 \right) \\ &= \left(|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 \right) \cdot \left(|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + |b_{12}|^2 + |b_{22}|^2 \right) \\ &= ||A||_F^2 \, ||B||_F^2 , \end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar. ■

96. ¿Serían $||A||_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$ y $||A||_p = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$, $1 < p < \infty$, normas matriciales? Si no lo son, ¿cómo podrían modificarse para que lo fueran?

97. *La norma espectral de una matriz.* Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. El *spectrum* $\sigma(A)$ de la matriz *cuadrada* A se define como:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda \text{ es valor propio de } A \,\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \det(A - \lambda I) = 0 \,\}\,. \tag{52}$$

De la teoría de las ecuaciones algebraicas se sabe que $\#(\sigma(A)) = n$. El radio espectral $\rho(A)$ de la matriz A se define como:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|\,. \tag{53}$$

La *norma espectral* $\|A\|_\sigma$ de la matriz *cuadrada* A se define como:

$$\|A\|_\sigma = \sqrt{\rho(A^* A)} = \max \left\{ \sqrt{\lambda} \,:\, \lambda \text{ es un valor propio de } A^* A \right\}\,. \tag{54}$$

Tarea: *Verifique que la norma espectral es una norma matricial i.e., que satisface los axiomas (i)-(iv) de más arriba.*

98. *La norma natural de una matriz.* 1) Toda matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ puede ser considerada como (la representación de) un operador lineal $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ (con respecto a sendas bases de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$). Si consideramos cualquier par de normas en $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente, ambas denotadas por $|| \cdot ||$ para mayor simplicidad notacional, entonces la norma de la matriz A *en cuanto operador lineal*, o la norma matricial *inducida por las normas de* $\mathbb{C}^n$ *y* $\mathbb{C}^m$, o la *norma natural* de A se define como:

$$|||A||| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{C}^n} \frac{||A.x||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||A.x||$$

Note que $x \in \mathbb{C}^n$ y $A.x \in \mathbb{C}^m$. Que la norma de A en cuanto operador lineal sea una norma matricial, i.e., que satisfaga los axiomas (i)-(iv) de más arriba, es una consecuencia de las propiedades generales de las normas vectoriales. Tarea: *Verifique esta aserción.*

2) La norma natural $|||A|||$ de A satisface:

$$\|A.x\| \leq |||A|||\ \|x\|\,, \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{C}^n\,.$$

Tarea: *Verifique esta aserción.*

3) Una manera de probar que una función dada $\varphi : M(m \times n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ es una norma matricial consiste en demostrar que φ es inducida por una norma vectorial. Tarea: *Dé algunos ejemplos.*

4) La *norma natural minimal* de A se define como $|||A|||_{\text{inf}} = \inf\{||A|| \,:\, || \cdot || \text{ es una norma natural}\}$. Tarea: *Verifique que* $|||A|||_{inf}$ *es una norma matricial.*

5) Lema 1: $\quad |||A|||_{\text{inf}} \geq \rho(A)$.

Demostración. Consideremos $\mathbb{C}^n$ equipado con una norma vectorial $\| \cdot \|$. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ y $u \in \mathbb{C}^n$ un vector propio normalizado (i.e., $\|u\| = 1$) de A con valor propio de $\lambda \in \sigma(A)$, i.e., $A.u = \lambda u$. Entonces se tiene $\|A.u\| = \|\lambda u\| = |\lambda|$. Luego, para la norma matricial natural $|||\cdot|||$ inducida por la norma vectorial $\| \cdot \|$ se tiene

$$|||A||| := \max_{\|x\|=1} \|A.x\| \geq \|A.u\| = |\lambda|\,.$$

De aquí resulta entonces $|||A||| \geq \rho(A)$ y, en consecuencia, $|||A|||_{\text{inf}} \geq \rho(A)$. ■

6) Lema 2: *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una norma matricial natural $|||\cdot|||$ tal que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.*

Demostración. Tarea ! ■

7) Demuestre o refute: *Si $n = m$ (i.e., si A es una matriz cuadrada de dimensión n), entonces se tiene $\rho(A) < 1$ si y sólo si $\lim_{p \to \infty} ||A^p|| = 0$ para alguna norma natural $|| \cdot ||$.*

99. [12, p. 24, ex. 3.3] Las normas de vectores y las p-normas de matrices satisfacen varias desigualdades que a menudo incluyen las dimensiones m o n. En cada una de las sub-preguntas que siguen en este ejercicio, verifique (¡o refute!) la desigualdad anotada y exhiba un ejemplo de matriz o vector no nulos que corroboren su resultado. Si la desigualdad es válida, determine una condición para que se cumpla el caso límite de igualdad y exhiba un ejemplo que verifique esa igualdad. En este ejercicio $x \in \mathbb{K}^m$ y $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$.
(a) $||x||_\infty \le ||x||_2$, (b) $||x||_2 \le \sqrt{m}||x||_\infty$, (c) $||A||_\infty \le \sqrt{n}||A||_2$, (d) $||A||_2 \le \sqrt{m}||A||_\infty$.

100. [12, p. 24, ex. 3.4] Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ y sea $B \in M(\mu \times \nu, \mathbb{K})$ con $\mu \le m$ y $\nu \le n$.
(a) Demuestre que B puede obtenerse a partir de A mediante multiplicación por matrices apropiadas de “aniquilación” de filas o columnas.
(b) Usando el resultado precedente demuestre que $||B||_p \le ||A||_p$ para todo $p \in \mathbb{R}$ con $1 \le p \le \infty$.

101. [12, p. 24, ex. 3.6] Sea $||\cdot||$ una norma cualquiera sobre $\mathbb{C}^m$. La correspondiente *norma dual* $||\cdot||'$ sobre $\mathbb{C}^m$ se define mediante la fórmula $||x||' = \sup_{||y||=1} |y^*x|$.
(a) Demuestre que $||\cdot||'$ es efectivamente una norma vectorial.
(b) Demuestre que, dado un vector $x \in \mathbb{C}^m$, existe un vector no nulo $z \in \mathbb{C}^m$ tal que $|z^*x| = ||z||'\,||x||$.
(b) Sean $x, y \in \mathbb{C}^m$ con $||x|| = ||y|| = 1$ dados. Usando (b), demuestre que existe una matriz de tipo *rank*-uno $B = yz^*$ tal que $Bx = y$ y $||B|| = 1$, donde $||B||$ es la norma de la matriz B inducida por la norma vectorial $||\cdot||$.

Descomposición de Valor Singular.

102. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
(a) Determine los valores singulares de A.
(b) Determine los vectores singulares *derechos* de A, i.e., los vectores-columna de la matriz $\widehat{V}$ de la SVD *reducida* $\widehat{U}\widehat{\Sigma}\widehat{V}^*$ de A. Note bien que lo pedido son los vectores-columna de $\widehat{V}$ y no los de $\widehat{V}^*$.
(c) Determine los vectores singulares *izquierdos* de A, i.e., los vectores-columna de la matriz $\widehat{U}$ de la SVD *reducida* $\widehat{U}\widehat{\Sigma}\widehat{V}^*$ de A.
(d) Verifique que la SVD de A que Ud. obtuvo es correcta.

Desarrollo.

(a) *Preámbulo.* Consideremos la SVD *reducida* de $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$:

$$A = U\Sigma V^* \quad \text{y, equivalentemente,} \quad A^* = V\Sigma U^* ,$$

donde $U \in M(m \times n, \mathbb{C})$ y $V \in M(n \times n, \mathbb{C})$ tienen columnas respectivamente ortonormales (i.e., $(U^j)^*U^k = \delta_{jk}$ y $(V^j)^*V^k = \delta_{jk}$)[14], y

$$\Sigma = \operatorname{diag}\left[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\right] \in M(n \times n, \mathbb{C}) , \qquad \text{con} \quad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge 0 ,$$

es una matriz diagonal. De aquí se desprende que:

$$A^*A = V\Sigma U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^2V^* ,$$

donde $A^*A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Luego, $(A^*A).V = V.\Sigma^2$, i.e.:

$$\begin{aligned}(A^*A).\left[V^1\middle|V^2\middle|\ldots\middle|V^n\right] &= \left[V^1\middle|V^2\middle|\ldots\middle|V^n\right].\operatorname{diag}\left[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2\right] \\ &= \left[\sigma_1^2V^1, \sigma_2^2V^2, \ldots, \sigma_n^2V^n\right] ,\end{aligned}$$

[14] δ_{jk} es el llamado *símbolo de Kronecker* definido mediante $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 , & \text{si } j = k , \\ 0 , & \text{si } j \neq k . \end{cases}$

donde V^k es la k-ésima columna de V. Por consiguiente, los vectores-columna de la matriz V de la SVD de A deben satisfacer:

$$(A^*A).V^k = \sigma_k^2 V^k\,, \qquad k = 1:n\,,$$

i.e., el k-ésimo vector-columna de la matriz V debe ser un vector propio de la matriz A^*A con valor propio σ_k^2. Esta observación permite obtener la matriz V con cierta facilidad. En el caso real habrá que considerar, evidentemente, la matriz A^TA.

(b) Cálculo de A^TA. Se obtiene directamente $A^TA = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.
Cálculo de los valores propios de A^TA mediante la solución de la ecuación $\det(A^TA - \lambda I) = 0$. Se obtiene $\lambda_1 = \sigma_1^2 = 16$ y $\lambda_2 = \sigma_2^2 = 6$.
Cálculo de los valores singulares de A^TA tomando raíz de los valores propios ya determinados. Se obtiene $\sigma_1 = 4$ y $\sigma_2 = \sqrt{6}$.

(c) Como se sabe, los vectores singulares *derechos* v_i de A corresponden a los vectores propios de la matriz A^TA, normalizados a norma 1. Luego, hay que resolver el sistema $A^TA.v = \lambda\, v$.
Caso $\lambda = \lambda_1 = 16$: se obtiene $v_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.
Caso $\lambda = \lambda_2 = 6$: se obtiene $v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.
Nota: Los *signos* de v_1 y v_2 no están unívocamente determinados, pero ello no influye en el desarrollo ulterior.

(d) Análogamente, los vectores singulares *izquierdos* de A se obtienen resolviendo el sistema $A\widehat{V} = \widehat{U}\widehat{\Sigma}$, donde $\widehat{V} = [v_1|v_2]$, $\widehat{\Sigma} = \mathrm{diag}[\sigma_1, \sigma_2]$ y los σ_i son los valores singulares obtenidos en (a). Luego, basta resolver el sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{=AV} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4\,u_{11} & \sqrt{6}\,u_{12} \\ 4\,u_{21} & \sqrt{6}\,u_{22} \\ 4\,u_{31} & \sqrt{6}\,u_{32} \end{bmatrix}}_{=U\Sigma}$$

para $u_1 = [u_{11}, u_{21}, u_{31}]^T$ y $u_2 = [u_{12}, u_{22}, u_{32}]^T$. De consiguiente:

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\sigma_1}\,\mathrm{columna}_1(AV) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{columna}_1 \left(\begin{bmatrix} 8/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{\sigma_2}\,\mathrm{columna}_2(AV) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{columna}_2 \left(\begin{bmatrix} 8/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ \sqrt{5/6} \\ -\sqrt{2/15} \end{bmatrix}$$

(e) Verificación:

$$\widehat{U}\,\widehat{\Sigma}\,\widehat{V}^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 0 & \sqrt{5/6} \\ 1/\sqrt{5} & -\sqrt{2/5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

103. (a) Construya su propia demostración para el siguiente teorema o estudie a fondo las demostraciones que proponen algunos de los textos de referencia para este importante resultado del Algebra Lineal Computacional. Asegúrese de haber comprendido correctamente las demostraciones que estudie.

Teorema 7. [12, Theor. 4.1, p. 29] *Sea* $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$*. Entonces existen matrices unitarias* $U \in M(m \times m, \mathbb{C})$ *y* $V \in M(n \times n, \mathbb{C})$*, y una matriz diagonal* $\Sigma = \operatorname{diag}\big[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\big] \in M(m \times n, \mathbb{C})$ *con* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$*,*[15] *tales que* $A = U\Sigma V^*$*.*

Los valores singulares *están siempre unívocamente determinados.*

Si A *es una matriz cuadrada y los* σ_k *son todos distintos, entonces los* los vectores singulares izquierdos*:*

$$U^j = j\text{-\emph{ésima columna de la matriz} } U\,, \qquad j = 1 : m = n\,,$$

los vectores singulares derechos*:*

$$V^k = k\text{-\emph{ésima columna de la matriz} } V\,, \qquad j = 1 : n = m\,,$$

están unívocamente determinados excepto por signos complejos (i.e., factores escalares complejos de módulo 1).

(b) Las demostraciones más populares del resultado precedente, son inductivas. Estudie la posibilidad de traducir algunas de esas demostraciones inductivas en algoritmos computacionales que permita obtener la SVD de una matriz dada A.

104. (Cf. [12, Lect. 5, p. 32]) Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ una matriz dada y $A = U\Sigma V^*$ su SVD *reducida*. Sea $r = \big|\{\sigma_j : \sigma_j > 0\}\big|$. Demuestre o refute, y en todo caso, discuta:

(a) $\operatorname{rank} A = r$.
(b) $\operatorname{Range}(A) = \operatorname{Col}(A) = \big\langle U^1, \ldots, U^r \big\rangle$, donde U^j = j-ésimo vector-columna de U.
(c) $\operatorname{Null}(A) = \big\langle V^{r+1}, \ldots, V^n \big\rangle$, donde V^k = k-ésimo vector-columna de V.
(d) $\|A\|_2 = \sigma_1$; $\|A\|_{\text{Frobenius}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$; $\displaystyle\min_{x \neq 0} \frac{\|A.x\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_n$ $(m \geq n)$.
(e) Los valores singulares σ_j *no nulos* vienen dados por $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, donde λ_j es el j-ésimo valor propio *no nulo* de la matriz $A^*A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ o de la matriz $AA^* \in M(m \times m, \mathbb{C})$. Ambas matrices tiene los mismos valores propios no nulos. Los valores propios de A^*A y AA^* son reales y no negativos.
(f) Si $A^* = A$, los valores singulares de A coinciden con los valores absolutos de los valores propios de A.
(g) Si $A \in M(m \times m, \mathbb{C})$, $\big|\det A\big| = \prod_{j=1}^m \sigma_j$.

105. [12, Lect. 5, p. 35] Aproximación de bajo rango. Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ una matriz dada y $A = U\Sigma V^*$ su SVD *reducida*. Sea $p = \min\{m, n\}$ y $r = \big|\{\sigma_j : \sigma_j > 0\}\big|$. Discuta, verifique, corrija o eventualmente refute los siguientes argumentos y resultados:

(a) Dado que $\Sigma = \operatorname{diag}\big[\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, \overset{\overset{p}{\downarrow}}{0}\big] = \sum_{j=1}^r \operatorname{diag}\big[0, \ldots, 0, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\sigma_j}, 0, \ldots, \overset{\overset{p}{\downarrow}}{0}\big]$, se tiene:

$$A = U\Sigma V^* = \sum_{j=1}^r U.\operatorname{diag}\big[0, \ldots, 0, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\sigma_j}, 0, \ldots, \overset{\overset{p}{\downarrow}}{0}\big].V^* = \sum_{j=1}^r \sigma_j\, U^j.\left(V^j\right)^*\,,$$

(b) Sea $A_\nu = \sum_{j=1}^\nu \sigma_j\, U^j.\left(V^j\right)^*$, $\nu = 0 : r$. Entonces:

$$A - A_\nu = \sum_{j=\nu+1}^r \sigma_j\, U^j.\left(V^j\right)^* = \underbrace{\big[U^{\nu+1}\big|\ldots\big|U^r\big]}_{U_{\nu+1}}.\underbrace{\operatorname{diag}\big[\sigma_{\nu+1}, \ldots, \sigma_r\big]}_{\Sigma_{\nu+1}}.\underbrace{\begin{bmatrix} \left(V^{\nu+1}\right)^* \\ \hline \vdots \\ \hline \left(V^r\right)^* \end{bmatrix}}_{V^*_{\nu+1}}$$

[15] Obsérvese que la matriz Σ no es, en general, cuadrada. No obstante, aún en ese caso se acostumbra a decir que Σ es una matriz diagonal. Cuando Σ no es cuadrada, sus filas de por debajo de la fila n, si $m \geq n$, o sus columnas a la derecha de la columna m, si $m \leq n$, son todas nulas.

constituye una SVD para $A - A_\nu$: $A - A_\nu = U_{\nu+1}.\Sigma_{\nu+1}.V^*_{\nu+1}$. Por definición de la SVD se tiene entonces:

$$\|A - A_\nu\|_2 = \text{primer (mayor) valor singular} = \sigma_{\nu+1}\,. \tag{55}$$

(c) Sea $E = \langle V^1, \ldots, V^{\nu+1}\rangle$ el espacio de $\mathbb{C}^n$ engendrado por los primeros $\nu+1$ vectores singulares derechos. Para todo $w \in E$ se tiene entonces:

$$\begin{aligned}(A.w)^*.(A.w) &= w^*A^*Aw = w^*V\Sigma U^*U\Sigma V^*w = \underbrace{w^*V}_{z^*}\,\Sigma^2\,\underbrace{V^*w}_{z} = z^*\Sigma^2 z\\ &= \sigma_1^2|z_1|^2 + \cdots + \sigma_{\nu+1}^2|z_{\nu+1}|^2 \geq \underbrace{\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_{\nu+1}|^2\right)}_{=\|z\|^2=\|w\|^2}\sigma_{\nu+1}^2\,.\end{aligned}$$

Nótese que $\|z\|^2 = \|V^*.w\|^2 = \|w\|^2$, pues la matriz $V \in M(n\times n, \mathbb{C})$ es unitaria y, por lo tanto, preserva la norma Euclideana. Por consiguiente se tiene:

$$\|A.w\|^2 \geq \sigma_{\nu+1}^2\,\|z\|^2 = \sigma_{\nu+1}\,\|w\|^2 \qquad \forall\, w \in E\,. \tag{56}$$

(d) Sobre la base de los resultados precedentes se puede demostrar el siguiente

Teorema 8. *Para todo $\nu = 0 : r$ se tiene:*

$$\|A - A_\nu\|_2 \overset{(55)}{=} \sigma_{\nu+1} \overset{\downarrow}{=} \inf_{\substack{B\in M(m\times n,\mathbb{C})\\ \operatorname{rank} B\leq\nu}} \|A - B\|_2\,. \tag{57}$$

Si $\nu = \min\{m, n\}$, hacemos $\sigma_{\nu+1} = 0$.

Demostración. Sólo hay que probar la segunda igualdad en (57). Supongamos que exista una matriz $B \in M(m \times n, \mathbb{C})$ con $\operatorname{rank} B \leq \nu$ tal que:

$$\|A - B\|_2 < \|A - A_\nu\|_2 = \sigma_{\nu+1}\,.$$

Consideremos entonces el subespacio:

$$W = \operatorname{Null}(B) \subseteq \mathbb{C}^n\,, \qquad \text{con} \quad \dim W = n - \operatorname{rank} B \geq n - \nu\,.$$

Para $w \in W$ se tiene entonces $B.w = 0$, $A.w = (A - B).w$, y:

$$\|A.w\|_2 = \|(A - B).w\|_2 \leq \|A - B\|_2\,\|w\|_2 < \sigma_{\nu+1}\,\|w\|_2\,.$$

Luego, W es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión *a lo menos* $n - \nu$ donde se cumple $\|A.w\|_2 < \sigma_{\nu+1}\,\|w\|_2$.
Por otro lado, de (c) sabemos que el subespacio E de $\mathbb{C}^n$ generado por los $\nu + 1$ vectores singulares derechos V^j, $j = 1 : \nu + 1$, de A, posee las siguientes propiedades:

$$\dim E = \nu + 1 \quad \text{y} \quad \|A.w\|^2 \overset{(56)}{\geq} \sigma_{\nu+1}\,\|w\|^2 \quad \forall\, w \in E\,.$$

En vista de $\dim W \geq n - \nu$ y $\dim E = \nu + 1$, los subespacios W y E de $\mathbb{C}^n$ deben tener una intersección que no se reduce al subespacio trivial $\{0\}$. En efecto, si $W \cap E \neq \{0\}$, entonces se tendría:

$$n + 1 = (n - \nu) + (\nu + 1) \leq \dim W + \dim E \leq \dim \mathbb{C}^n = n\,,$$

que obviamente es una contradicción. Existe, por lo tanto, un vector $0 \neq w \in W \cap E$ que debe satisfacer simultáneamente $\|A.w\|_2 < \sigma_{\nu+1}\,\|w\|_2$, por estar en W, y $\|A.w\|_2 \geq \sigma_{\nu+1}\,\|w\|_2$, por estar en E. Ello representa, evidentemente, otra contradicción. ■

Nota. El lector diligente seguramente habrá observado que la demostración precedente sólo prueba la desigualdad $\sigma_{\nu+1} \leq \inf_{\substack{B\in M(m\times n,\mathbb{C})\\ \operatorname{rank} B\leq\nu}} \|A - B\|_2$ en (57). ¿Cómo se obtendría la otra desigualdad?

106. Sea $A \in M(n \times n, R)$ una matriz positiva definida. Para $i_k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ sea $A[i_1, \ldots, i_p]$ la submatriz de A formada por las filas $i_1, \ldots, i_p$ y las columnas $i_1, \ldots, i_p$ de la matriz A. Note, entonces, que la diagonal de $A[i_1, \ldots, i_p]$ está contenida en la diagonal de de A. Se dice que $A[i_1, \ldots, i_p]$ es una *submatriz principal* de A.

(a) Demuestre o refute, y en cualquier caso, discuta: $\det A[i_1, \ldots, i_p] > 0$ para toda selección de los índices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$.

(b) ¿Es equivalente (a) con el hecho que A es positiva definida?

(c) ¿Qué relación hay entre los valores singulares de las matrices $A[i_1, \ldots, i_p]$ y los valores singulares de la matriz A?

(d) Sea $V(A, \gamma)$ el volumen del elipsoide $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x^T.A.x \leq \gamma\}$. Calcule el cuociente $\dfrac{V(A,\gamma)}{\det(A)^{1/2}}$.

107. [7, p. 415] Sea $x \in \mathbb{C}^n$ un vector no nulo dado. Considere el vector x como una matriz $X \in M(n \times 1, \mathbb{K})$. Sean $W = [1] \in M(1 \times 1, K)$, $\Sigma = [||x||_2, 0, \ldots, 0]^T \in M(n \times 1, \mathbb{K})$, $V = \left[\dfrac{x}{||x||_2}, v_2, \ldots, v_n\right] \in M(n \times 1, \mathbb{K})$, donde $v_2, \ldots, v_n$ es un sistema de $n-1$ vectores ortonormales cualesquiera, todos ellos ortogonales al vector x. Demuestre que una descomposicion de valor singular de la matriz X viene dada por $X = V\Sigma W^*$.

108. [7, p. 416] Si $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es no singular, demuestre que el siguiente procedimiento produce una descomposición de valor singular $A = V\Sigma W^*$:

(i) Forme la matriz Hermitiana positiva definida AA^* y determine una diagonalización unitaria $AA^* = U\Lambda U^*$ hallando los valores propios positivos λ_i, $i = 1, \ldots, n$, y el correspondiente sistema de u_i, $i = 1, \ldots, n$, de vectores propios ortonormales.

(ii) Defina $\Sigma := \Lambda^{1/2}$ y $V = U = [u_1, \ldots, u_n]$.

(iii) Defina $W = A^* V \Sigma^{-1}$.

a) Demuestre todo. En particular, demuestre que W es unitaria con $A = V\Sigma W^*$.

b) Escriba un programa que permita obtener la descomposicion de valor singular.

c) Usando su programa, obtenga descomposiciones de valor singular para tres o cuatro matrices de dimensiones 3, 5, y 8, por ejemplo. Para resolver esta parte del ejercicio el estudiante probablemente querrá aplicar el algoritmo descrito en el ejercicio precedente. Converse con sus colegas que abordaron ese ejercicio para que le faciliten os códigos correspondientes.

d) Usando un programa *ad hoc* verifique que el producto de las matrices de las factorizaciones que obtenga, efectivamente dan las matrices originales.

109. [7, p. 416] Sea $A \in M(n \times n, K)$ una matriz no necesariamente no-singular. Demuestre que el siguiente procedimiento produce una descomposición de valor singular $A = V\Sigma W^*$:

(i) Sea $I \in M(n \times n, K)$ la matriz identidad. Entonces existe una constante $c = c(A)$ tal que la matriz $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ es no-singular para todo $\varepsilon \in]0, c[\subset \mathbb{R}$. *Sugerencia*: Observe las raíces de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$ en el plano complejo.

(ii) Elija ahora $\varepsilon \in]0, c[\subset \mathbb{R}$. Aplique el procedimiento del ejercicio anterior para obtener una descomposición de valor singular $A_\varepsilon = V_\varepsilon \Sigma_\varepsilon W_\varepsilon^*$

(iii) Aplique ahora el siguiente resultado, *que no se pide demostrar*:

Lema Auxiliar. *Sea* $\{U_p\}_{p\in\mathbb{N}} = \left[u_{ij}^p\right]_{p\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de matrices unitarias en* $M(n \times n, \mathbb{K})$. *Entonces existe una subsucesión* $\{U_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \left[u_{ij}^{p_k}\right]_{k\in\mathbb{N}}$ *de la sucesión original, tal que*

$$\lim_{k\to\infty} u_{ij}^{p_k} = u_{ij}^0 \,, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \,,$$

donde la matriz límite $U_0 = \left[u_{ij}^0\right] \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *también es unitaria.*

Sobre la base de este lema auxiliar se obtiene una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $]0, c[$, una matriz diagonal $\Sigma \in M(n \times n, \mathbb{K})$ con coeficientes no negativos, y matrices unitarias $V, W \in M(n \times n, \mathbb{K})$ tales que:

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0\,, \quad \lim_{k\to\infty} V_{\varepsilon_k} = V\,, \quad \lim_{k\to\infty} \Sigma_{\varepsilon_k} = \Sigma\,, \quad \lim_{k\to\infty} W_{\varepsilon_k} = W\,.$$

(iv) Demuestre que $A = V\Sigma W^*$.

110. [7, p. 421, pr. 7] Sea $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ una matriz dada con descomposición de valor singular $A = V\Sigma W^*$. Defina $A^\dagger = W\Sigma^\dagger V^*$, donde $\Sigma^\dagger$ es la transpuesta de Σ en la cual los valores singulares *positivos* de A se reemplazan por sus valores recíprocos. Demuestre que:
(a) $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$ son hermitianas, (b) $AA^\dagger A = A\,$, (c) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger\,$.
Demuestre que $A^\dagger = A^{-1}$ si A es cuadrada y no-singular. La matriz $A^\dagger$ se llama *inversa generalizada* o *inversa de Moore-Penrose* de la matriz A. Se puede demostrar que la inversa generalizada existe para toda matriz A, incluso para matrices cuadradas singulares o para matrices no cuadradas. Demuestre, además, que $A^\dagger$ queda unívocamente determinada por las propiedades (a), (b), (c).

111. [7, p. 422, pr. 10] La descomposición de valor singular se puede obtener sin utilizar explícitamente vectores ni valores propios. Los vectores singulares (de izquierda y de derecha) y los valores singulares pueden construirse directamente a partir de la llamada *caracterización variacional de la norma espectral* (que es, simplemente, la definición usual de la norma de un operador lineal): si $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ es una matriz dada, entonces se define:

$$||A||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2\,. \qquad \text{(Norma Espectral)}$$

(a) Sea $n \geq 2$ y suponga que $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ tiene la forma:

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & X \end{bmatrix}\,, \qquad \text{con} \quad \sigma_1 = ||B||_2\,, \quad w \in \mathbb{C}^{n-1}\,, \quad X \in M((n-1)\times(n-1), \mathbb{K})\,.$$

Demuestre que $w = 0$. *Sugerencia*: Si $\sigma > 0$, considere $\zeta = \dfrac{1}{(\sigma_1^2 + w^*w)^{1/2}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix}$, demuestre que $||B\zeta||_2^2 \geq \sigma_1^2 + w^*w$, y use la fórmula (Norma Espectral). Además, ¡consulte [12]!
(b) Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, defina $\sigma_1 = ||A||_2$, y use la fórmula (Norma Espectral) para probar que existe un vector unitario $||x||_1$ tal que $||A\,x_1||_2 = \sigma_1$. Defina $y_1 = \sigma_1^{-1} A\,x_1$ para la parte (c). *Nota*: Posiblemente el estudiante quiera usar aquí el teorema de Weierstrass para funciones continuas definidas sobre conjuntos compactos.
(c) Sean $V_1, W_1 \in M(n \times n, \mathbb{K})$ matrices unitarias cuyas primeras columnas son x_1 e y_1 respectivamente. Demuestre que $V_1^* A W_1$ tiene norma espectral σ_1 y que tiene la forma de la matriz B de la parte (a). Concluya que $V_1^* A W_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$.
(d) Formule un proceso de "deflación inductiva" de A introduciendo columnas y filas con "ceros fuera de la diagonal" (cuando se las observa en la matriz A) mediante pre- y post-multiplicación por matrices unitarias apropiadas. Verifique que el proceso de inducción termina tras un número finito de pasos y que al final se obtiene la descomposición de valor singular de A.
(e) ¿Qué ocurre si la matriz original A no es cuadrada?

112. (Cf. [7, Theor. 7.3.2, p. 412] Considere una descomposición de valor singular $A = U\Sigma V^*$ de una matriz cuadrada $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Escriba:

$$A = U\Sigma V^* = (U\Sigma U^*)\,(UV^*) = PW\,, \qquad \text{con} \quad P = U\Sigma U^* \quad \text{y} \quad W = UV^*\,. \tag{58}$$

Demuestre o refute, y en todo caso, discuta:
(a) P es positiva semidefinida, i.e., $x^*Px \geq 0$ (note que dice "$\geq$" y no "$>$") para todo $x \in \mathbb{K}^n$, con $x \neq 0$.
(b) $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} A$.
(c) W tiene filas ortonormales, i.e. $WW^* = I$.

(d) P está unívocamente determinada y satisface $P = (AA*)^{1/2}$. Dé una interpretación razonable para esta última fórmula.
Suponga ahora que la matriz original A no es cuadrada, digamos $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ con $m \geq n$. A *"bruta forza"*, haga cuadradas (de $m \times m$) todas las matrices (exceptuando V^* que conviene dejarla como una matriz de $m \times n$) de la descomposición de valor singular, agregando 0's a diestra y siniestra.
(e) Examine si la factorización (58) y las propiedades (a)-(d) siguen siendo válidas o no.
(f) La nueva matriz W ¿está unívocamente determinado cuando $\operatorname{rank} A = n$?
(g) Si A es real, ¿es posible tomar P y W como matrices reales?
(h) ¿Qué pasa si $m \leq n$?
Como el lector sospechará, (casi) todas las respuestas deberían ser afirmativas. La factorización obtenida se conoce como *"representación polar"* de una matriz dada.
(i) Escriba un programa para obtener la representación polar de cualquier matriz.

113. [7, p. 415][12, p. 37, exc. 5.2] Usando SVD[16] demuestre que toda matriz $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ es el límite (¿cuál norma sería apropiada para calcular el límite?) de una sucesión de matrices $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m \times n} \in M(m \times n, \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, de rango completo. En otras palabras, demuestre que el conjunto de las matrices de rango completo *es denso* en $M(m \times n, \mathbb{C})$.

114. [12, p. 37, exc. 5.3] `[For all students!!!]` Considere la matriz $\begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Determine s.c.P.L.P. [17] una SVD real de A de la forma $A = U\Sigma V^T$. La SVD no es única (compruebe este hecho). Así, encuentre la SVD que tiene el menor número de signos negativos en U y V.
(b) Haga una tabla con los valores singulares, los vectores singulares izquierdos, y los vectores singulares derechos de A. Dibuje cuidadosamente la bola unitaria de $\mathbb{R}^2$ y su imagen bajo A, junto con los vectores singulares, indicando claramente las coordenadas de sus vértices. Use sistemas de coordenadas claramente rotulados con los nombres de las variables involucradas y todos los signos convencionales del Dibujo Técnico que aseguren una buena comprensión de sus diagramas.
(c) Determine las normas 1, 2, ∞, y de Frobenius-Hilbert-Schmidt de la matriz A.
(d) Determine A^{-1} indirectamente vía SVD.
(e) Verifique que: $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ y $|\det A| = \sigma_1 \sigma_2$.
(f) Determine el área del elipsoide que resulta como imagen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^2$ bajo A.

115. [12, p. 37, exc. 5.4] Suponga que $A \in M(m \times m, \mathbb{C})$ tiene una SVD $A = U\Sigma V^*$. Encuentre una EVD [18] $A = X\Lambda X^{-1}$ de la matriz hermitiana $\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \in M(2m \times 2m, \mathbb{C})$.

116. Cf.: `http://www.computer.org/cise/homework/v5n3/index.htm`
James G. Nagy and Dianne P. O'Leary, [9]. Los llamados *problemas inversos* constituyen uno de los desafíos más exigentes en la computación aplicada a la ciencia y a la ingeniería, debido a que involucran la determinación de los parámetros de un sistema observado sólo indirectamente. Un ejemplo de tales problemas es, por ejemplo, la determinación de un sistema a partir solamente de su *espectro*. Otro ejemplo típico es la determinación de posibles fracturas en un (es)tanque exclusivamente a partir de mediciones de tipo sonar.

El problema que se quiere discutir aquí es el siguiente: dada una imagen borrosa y un modelo lineal para la borrosidad, reconstruir la imagen original. Este problema inverso lineal ilustra el impacto del *mal condicionamiento* en la selección de algoritmos. La herramienta principal para este proyecto es la SVD.

---

[16] *"singular value decomposition"*
[17] s.c.P.L.P. = sólo con papel, lápiz y pensamiento
[18] *"eigenvalue decomposition"*

(1) Mal Condicionamiento. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales:

$$K.f = g\,, \qquad K \in M(n \times n, \mathbb{R})\,, \quad f, g \in \mathbb{R}^n\,.$$

Supondremos que la matriz K está escalada de modo que su mayor valor singular es $\sigma_1 = 1$. Si el menor valor singular σ_n es aproximadamente 0, entonces K está mal condicionada. Distinguiremos dos tipos de mal condicionamiento:

- La matriz K se considera *numéricamente de rango deficiente* si existe un j tal que $\sigma_j \gg \sigma_{j+1} \approx \cdots \approx \sigma_n \approx 0$, i.e,, si hay una brecha ostensible entre los valores singulares grandes y los pequeños.
- Si los valores singulares decaen a 0 sin ninguna brecha especial en el espectro, se dice que el sistema lineal $K.f = g$ es un *problema mal condicionado discreto*

El cálculo de soluciones aproximadas muy cercanas a las soluciones exactas en un problema mal condicionado discreto del tipo $K.f = g$ es, por lo general, un problema muy difícil,especialmente debido a que en muchas aplicaciones reales, g no se conoce exactamente. En realidad la data típicamente tiene la forma:

$$g = K.f + \eta\,,$$

donde η representa un ruido (desconocido) oerrores de medición. El objetivo es, entonces, dada una matriz mal condicionada K y un vector g, calcular una (buena) aproximación del vector desconocido f.

La solución ingenua de $K.f = g$, usualmente, no es apropiada cuando K es muy mal condiconada, como en el caso que nos interesa. En estos casos se usa un procedimiento de *regularización* para hacer el problema menos sensible al ruido. En algunos círculos se habla de *robustificación* del proceso.

(2) Regularización de Tikhonov. El método de regularización más conocido es la llamada *regularización de Tikhonov* que calcula una solución del problema de mínimos cuadrados amortiguado:

$$\min_f \left\{ \|g - Kf\|_2^2 + \alpha^2 \|f\|_2^2 \right\}\,. \tag{59}$$

El término $\alpha^2 \|f\|_2^2$ impone una penalización al tamaño de la solución. Dicha penalización reduce el efecto de los valores singulares pequeños.

(3) Problema 1. Demuestre que la ecuación (59) es equivalente al problema de mínimos cuadrados lineal:

$$\min_f \left\| \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K \\ \alpha I \end{bmatrix} f \right\|_2^2. \tag{60}$$

El escalar α (llamado *parámetro de regularización*) controla el grado de *suavidad* de la solución. Evidentemente, $\alpha = 0$ implica ausencia de regularización y en este caso la solución de (60) estará muy probablemente corrupta con mucho ruido. Por otro lado, si α es grande, la solución calculada no podrá ser una buena aproximación de la solución exacta f. La elección de un valor apropiado para α no es algo trivial. Varios algoritmos han sido propuestos en la literatura pero aquí se usará un método manual.

(4) Problema 2. Demuestre que si K tiene una SVD $K = U\Sigma V^T$, entonces la ecuación (60) puede transformarse en el problema de cuadrados mínimos equivalente:

$$\min_f \left\| \begin{bmatrix} \widehat{g} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma \\ \alpha I \end{bmatrix} \widehat{f} \right\|_2^2, \qquad \text{con} \quad \widehat{f} = V^T f\,, \quad \widehat{g} = U^T g\,. \tag{61}$$

(5) Problema 3. Obtenga una fórmula para la solución de la ecuación (61). *Hint*: haga cero la derivada de la función de minimización y resuelva para f.

Todo esto constituye un algoritmo para determinar la solución de Tikhonov de un problema mal condicionado discreto.

(6) SVD truncada. Otro método para regularizar el problema consiste en truncar la SVD. El siguiente Problema 4 ilustra cómo expresar la solución al problema de mínimos cuadrados en términos de la SVD.

(7) PROBLEMA 4. Demuestre que la solución del problema:

$$\min_f \left\{ \|g - Kf\|_2^2 \right\} . \tag{62}$$

viene dada por:

$$f_{\ell s} = V\Sigma^\dagger U^T \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T g}{\sigma_i} v_i \,, \tag{63}$$

donde u_i es la i-ésima columna de U, y v_i es la i-"esima columna de V.
Se puede ver que hay problemas en $f_{\ell s}$ si un pequeño valor de σ_i divide un término $u_i^T g$ que contiene errores. En tales casos, $f_{\ell s}$ quedará dominado por errores.
Para eludir esta dificultad, Richard Hanson y James Varah han sugerido truncar la expansión (63):

$$f_{\ell s} = \sum_{i=1}^{p} \frac{u_i^T g}{\sigma_i} v_i \,, \tag{64}$$

para algún valor $p < n$.
Ahora tenemos todos los ingredientes para resolver el problema de eliminación de la borrosidad en procesamiento de imágenes. Supongamos que tenemos una imagen borrosa o ruidosa G junto con algún conocimiento del operador de borrosidad, y queremos construir la imagen verdadera original F. Este es un ejemplo de un problema mal condicionado discreto en el cual los vectores en el sistema lineal $g = K.f + \eta$ representan los arreglos bidimensionales (F y G) de las imágenes apilados por columnas para formar vectores (por ejemplo, debajo de la primera columna de F viene la segunda columna de F y así sucesivamente hasta concluir con la n-ésima columna, obteniéndose de esta manera un vector de n^2 componentes). En la notación de Matlab se tendría:

$$f = \texttt{reshape}(F, n, 1) \,, \qquad g = \texttt{reshape}(G, n, 1) \,. \tag{65}$$

El objetivo de este problema es, dados K y G, reconstruir una aproximación de la imagen desconocida F.
Si suponemos que F y G contienen $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ pixeles, entonces f y g son vectores de largo n y K es una matriz de $n \times n$ que representa la borrosidad en la imagen. Por lo general esta matriz es muy grande para usar SVD. Sin embargo, en algunos casos se puede escribir K como un producto de Kronecker $K = A \otimes B$ y entonces se puede usar SVD.

(8) DOS PALABRITAS ACERCA DE LOS PRODUCTOS DE KRONECKER. El producto de Kronecker $A \otimes B$, donde A y B son matrices de $m \times m$ se define mediante:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix} . \tag{66}$$

Teorema 9. *Si $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ y $B = U_B \Sigma_B V_B^T$, entonces $K = U\Sigma V^T$ donde $U = U_A \otimes U_B$, $\Sigma = \Sigma_A \otimes \Sigma_B$ y $V = V_A \otimes V_B^T$.*

Tarea: Demuestre el teorema precedente.
Por consiguiente, si una matriz grande es el producto de Kronecker de dos matrices más pequeñas, entonces se puede calcular la SVD de la matriz grande. En la página "web" de J.G. Nagy y D.P. O'Leary mencionada al comienzo de este ejercicio se puede hallar un programa Matlab de muestra que ilustra la propiedad discutida.
Para resolver el problema de eliminación de la borrosidad de una imagen hay que operar cuidadosamente con con matrices más pequeñas pues, de otro modo, rápidamente aparecen problemas de memoria o almacenamiento de data.

(9) PROBLEMA 5. Escriba un programa que toma matrices A, B y una imagen G, y calcule aproximaciones de la imagen F mediante la regularización de Tikhonov y la SVD truncada. Para cada uno de estos algoritmos, realice algunos experimentos para hallar el valor del parámetro

de regularización (α para Tikhonov y p para la SVD truncada) que da la imagen más nítida. La referida página "web" de J.G. Nagy y D.P. O'Leary contiene datos de muestra: una imagen borrosa G y matrices A, B. La tarea consiste en restaurar la imagen hasta el punto que se pueda leer el texto que contiene. Compare la efectividad de los dos algoritmos.

Referencias

[1] H. Anton. *Elementary Linear Algebra.* John Wiley and Sons, New York, January 2000. Paperback Edition, US$ 34.36; hardcover, US$ 116.00.

[2] M. Cañas-Cohen. *Algebra Lineal para MAT 023.* Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, 2002.

[3] J. Dieudonné. *Abrégé d'histoire des mathématiques*, volume I et II. Hermann, Paris, 1978. Avec la collaboration de P. Dugac, W.J. et F. Ellison, J. Guérindon, M. Guillaume, G. Hirsch, C. Houzel, P. Libermann, M. Loève, J.L. Verley.

[4] R. Frucht and C. González. *Ejercicios de Matemáticas.* Editorial Universitaria, S.A., Santiago de Chile, 1960. Universidad Técnica Federico Santa María, Federación de Estudiantes, Valparaíso.

[5] G.H. Golub and C. Van Loan. *Matrix Computations.* John Hopkins University Press, Baltimore-London, 1996 (Third Edition). This encyclopedic work is the must in the field!

[6] F.E. Hohn. *Elementary Matrix Algebra.* Collier-MacMillan, London-New York, 1964.

[7] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985 (reprinted 1994).

[8] A.I. Máltsev. *Fundamentos del Algebra Lineal.* Editorial Mir, Moscú, 1972.

[9] J.G. Nagy and D.P. O'Leary. Image deblurring: I can see clearly now. *Computing in Science and Engineering*, 5(3):82–84, May-June 2003. Copublished by the IEEE Computer Society and the American Institute of Physics.

[10] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993. A rather advanced but very good book indeed!

[11] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA 02181 USA, 1993. A very good elementary book indeed!

[12] L.N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997. A very good book indeed! More advanced than Strang's book.

LSC/lsc, Valparaíso, 20 de marzo de 2007