

Diseño de Wavelets mediante Algoritmos Genéticos y su evolución a partir de la Transformada de Fourier

Luis Arévalo, Estudiante.

Resumen—Se describirá una técnica para el diseño de Wavelets para la clasificación de señales que se construyen en base a Algoritmos Genéticos. Para ello se describirá brevemente la teoría de Fourier y sus limitaciones para cierto tipo de señales, además de otras técnicas para el diseño de Wavelets.

Términos Claves—Wavelets, Fourier, Algoritmos Genéticos, Clasificación.

I. INTRODUCCIÓN

El diseño de Wavelets para la clasificación de señales es un problema que ha atraído gran atención en la última década. Sin embargo, a fines del siglo XIX es Joseph Fourier quien establecía que una señal podía ser representada como la suma de series de senos y cosenos. Ésta es la Teoría de Fourier, que ha ido evolucionando hasta estos días donde es ampliamente utilizada es la resolución de problemas científicos e ingenieriles.

Jean Morlet, geofísico francés, diseñó una alternativa a la Transformada de Fourier, utilizando un sistema basado en una función prototipo que poseía la misma robustez y versatilidad que ésta, pero con la diferencia que analizaba a fondo señales cuya amplitud variaba en forma rápida y abrupta en el tiempo y señales cuyo contenido de frecuencia es variable de un instante de tiempo a otro. Esta nueva herramienta matemática fue reconocida por un matemático francés llamado Yves Meyer, quien descubrió que los Wavelets formaban bases ortonormales de espacios ocupados por funciones cuyo cuadrado es integrable. En otras palabras se puede decir que el contenido energético de la función es finito, que expresado en lenguaje matemático quedaría:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (1)$$

donde a y b corresponden a los límites de la función wavelet u *ondita*, que claramente es localizable en el tiempo.

Entrando en el terreno de los wavelets en sí, existen los wavelets ortogonales, que es un conjunto de funciones ortogonales entre sí que representan la señal. Una técnica para el diseño de wavelets fue la ideada por Tewfik *et al.*, quien diseñó wavelets ortogonales basándose en el cálculo de una función costo que buscaba minimizar el error entre la señal original y la representación aproximada o maximizar la norma de la proyección de la señal sobre el espacio del wavelet.

L. Arévalo es estudiante de la Universidad Técnica Federico Santa María, en Valparaíso, Chile. Email: larevalo@inf.utfsm.cl. URL: <http://www.inf.utfsm.cl/~larevalo>.

También están los wavelets biortogonales, cuya idea es poder representar la señal mediante dos conjuntos de funciones que no necesariamente sean ortogonales entre pares del mismo conjunto, pero sí lo deben ser entre distintos. Sweldens ha desarrollado un esquema general para el diseño de wavelets biortogonales, que es el esquema del *lifting*.

Las técnicas mencionadas tienen una gran utilidad en el contexto de las compresiones, pero claramente existen otras aplicaciones que requieren de una función de costo diferente. La idea será basarse en el análisis de las características y poder encontrar el wavelet óptimo para la clasificación de señales, que depende tanto del clasificador como del detalle, siendo el primero muchas veces demasiado complicado para poder encontrar una solución de manera directa. Para esto se utilizará Algoritmos Genéticos, que permitirá encontrar una función costo directamente relacionada con el funcionamiento del clasificador.

II. TEORÍA DE FOURIER

La idea fundamental de las Series de Fourier es que un proceso físico puede ser representado como una función de tiempo, que si es periódica, ésta puede ser representada como una suma de senos y cosenos. Además, esta función (o señal) a analizar debe ser integrable y a su vez esta integral debe ser finita.

Las series de Fourier sirven para poder realizar la Transformada de Fourier, que lleva una función que se encuentra en el dominio del tiempo al dominio de las frecuencias representadas por senos y cosenos de diferentes frecuencias cuya suma total da la señal original. También podemos llevar la función desde el ámbito de las frecuencias al del tiempo mediante la transformada inversa.

Algunas de las características principales de la Transformada de Fourier es que se puede escalar en el tiempo y la frecuencia, así como también puede ser trasladada en ambos dominios. Es importante destacar que la energía de la señal no varía en los dominios, siempre es la misma.

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) es muy importante ya que como bien sabemos, la representación dentro de un computador es discreta y no continua. Es por esto que los coeficientes de la Transformada ahora son discretos y pueden ser representados mediante una matriz de Fourier por un vector que corresponde a valores discretos de una señal en el tiempo. Esta matriz tiene la particularidad que sus columnas son ortogonales por lo que su inversa corresponde

a la transpuesta conjugada, lo que lleva a un fácil cálculo de la Transformada Inversa.

La Transformada Rápida de Fourier (FFT) tiene la particularidad de eliminar información redundante que genera la transformada discreta. Esto gracias a aprovechar propiedades de periodicidad y simetría de la fase. Además, al ir dividiendo la señal en mitades, hace que sea totalmente conveniente para operar sobre señales cuyo número de muestras es potencia de dos. Dentro de los algoritmos para calcular la FFT se encuentran el decimado de tiempo y de frecuencia. El primero toma la totalidad de los datos de entrada y los separa en pares e impares, mientras que el segundo los divide en la primera mitad correlativa y la otra la segunda mitad restante. En ambos algoritmos cada una de las dos secuencias de datos corresponde exactamente a la mitad de la longitud de la señal original. También es importante destacar que ambos algoritmos son recursivos, por lo que se puede seguir con el proceso de decimación y así disminuir de manera considerable el número de operaciones con respecto a la DFT.

Finalmente se encuentra la Transformada Corta de Fourier en el Tiempo (STFT), que lo que pretende es obtener una mejor resolución en el tiempo para señales semi estacionarias o simplemente no estacionarias. Esto se logra mediante un procedimiento llamado *windowing*, cuya idea es dividir la señal en pequeños pedazos e interpretarlos como señales estacionarias para así poder utilizar la transformada de Fourier clásica. La longitud de estos pedazos depende de una función tiempo-ventana que se debe definir, y empíricamente está demostrado que mediante esta transformada no se puede obtener a la vez una buena resolución de tiempo y frecuencia, debido a lo estacionario de la función tiempo-ventana. La idea sería encontrar la manera que esta función fuese dinámica.

Es así como llegamos a la Transformada Continua de Wavelet (CWT), una herramienta matemática que permite, al igual que la CTFT tomar una señal dentro de un pequeño intervalo y realizar el análisis sólo sobre éste. La diferencia radica en que la CTFT realiza *windowing* de igual duración para frecuencias altas y bajas, mientras que la CWT regula la duración. La CWT está definida de la siguiente manera:

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (2)$$

donde ψ corresponde al wavelet madre, a al ancho de ψ , b indica la ubicación en el tiempo de ψ y $x(t)$ es la señal original. Dentro de las particularidades que debe poseer ψ se encuentra que debe ser *admisibile*, esto es, que la transformada de Fourier de ψ , es decir Ψ debe ser igual a cero cuando la frecuencia es cero ($\Psi(0) = 0$). Con esto decimos que el wavelet madre está centrado en cero y que su transformada de Fourier cae a cero cuando la frecuencia ω tiende a cero.

III. SISTEMAS WAVELETS

Llamaremos Sistemas Wavelets al conjunto de funciones generado por la función madre $\psi(t)$ y su respectiva función escala $\phi(t)$. Un Sistema Wavelet de Primera Generación es aquel que posee una única función wavelet y traslaciones enteras. El wavelet madre da origen una familia de funciones

de la siguiente manera:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Dada esta función madre, más una función escala cada una con un respectivo conjunto de coeficientes, se puede aproximar cualquier señal perteneciente al espacio $L^2(\mathbb{R})$.

El conjunto de funciones generado por el wavelet madre no es único, y la idea de este paper es poder encontrar el conjunto que mejor represente la señal mediante algoritmos genéticos. Cabe destacar eso sí que todos los conjuntos de funciones generados poseen ciertas características, como:

- Si el conjunto de funciones wavelets está dado por $\psi(t)$ tal que $j, k \in \mathbb{Z}$, entonces la señal puede ser representada como

$$f(t) = \sum_k \sum_j d_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

- Un coeficiente wavelet $d_{j,k}$ representa un componente bien definido en un intervalo de tiempo, lo que permite que el sistema wavelet sea localizable en el tiempo.
- Si una función escala $\phi(t - k)$, con $k \in \mathbb{Z}$ representa a un conjunto de señales, entonces $\phi(2t - k)$, con $k \in \mathbb{Z}$ representa un conjunto más amplio que contiene al anterior. Lo anterior corresponde a las condiciones de multi-resolución.
- Los coeficientes de más baja resolución pueden ser calculados a partir de los coeficientes de más alta resolución mediante un algoritmo denominado banco de filtros. Todo esto se enmarca dentro de lo que es el análisis de multi-resolución.

Una función escala $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ está definida de la siguiente manera:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Si una función $f(t)$ puede ser representada como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t)$, entonces se encuentra en el subespacio

$V_j = \overline{\text{span}_{k \in \mathbb{Z}} \{ \phi_{j,k}(t) \}}$ que es subconjunto de $L^2(\mathbb{R})$. Para poder determinar si una función escala es *buen*a, se debería verificar que para cada j , $\phi_{j,k}$ forme una base ortonormal para el subespacio V_j . Además, se debe cumplir que para cada j , $V_j \subset V_{j+1}$ y que $\phi(t)$ tenga soporte compacto.

Por otra parte sabemos que el espacio que genera la función $\psi_{j,k}(t)$, W_j , es el complemento ortogonal de V_j , esto es, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Ahora, si la función $f(t) \in W_j$, entonces puede ser representada de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (5)$$

IV. WAVELETS

A. Wavelets de Haar

Entrando en tierra derecha, debemos primero que todo conocer el wavelet más sencillo, que es el Wavelet de Haar. A partir de este wavelet iremos conociendo el por qué de la estructura general de un sistema wavelet, calculando su función escala y función wavelet, con sus respectivos coeficientes.

La función escala del Wavelet de Haar está definida de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

Esta función escala como tal no es de mucha ayuda, pues no se acercará a la señal que pretendamos representar. Para eso se realizan traslaciones enteras, quedando ahora nuestra función escala $\phi(t)$ como sigue:

$$\phi(t - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 = k \leq t < k + 1 = t_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7)$$

Ahora se está listo para poder calcular los coeficientes de la función escala, los cuales permitirán junto a la misma función reconstruir la señal original. El cálculo es muy sencillo, y sólo basta resolver para cada uno de estos la siguiente ecuación:

$$f(t) = \sum_k c_k \phi_k(t) \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Si bien ahora se está en condiciones de obtener una buena aproximación de la señal original, todavía se puede hacer un mejor esfuerzo si no sólo trasladamos la función escala, si no que también la escalamos. Con esto se genera una nueva familia de funciones $\phi_{j,k}$ que queda definida así:

$$\phi(2^j t - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{1+k}{2^j} = t_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

Con lo anterior podemos encontrar un representación bastante buena de la señal original, pero no se cumple con uno de los requisitos fundamentales, que es que se forme una base ortonormal. Para que esto se cumpla se debe encontrar una constante de normalización que multiplicada por $\phi(2^j t - k)$ nos de una familia de funciones ortonormales. Esta constante es $2^{\frac{j}{2}}$, por lo que la familia de funciones generada por $\phi_{j,k}(t)$ queda:

$$2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{1+k}{2^j} = t_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (10)$$

Cabe destacar eso sí que aumentando j , es decir el espacio en el que se está trabajando, si bien se va a encontrar una señal reconstruida con mejor resolución, una señal mucho mejor descrita va a ser encontrada definiendo un espacio W_j que represente el complemento de V_j en V_{j+1} . Esta función W_j es la definida como Función de Wavelet, que en este caso particular será la de Haar.

Al igual que la función escala, la función wavelet tiene una definición básica:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (11)$$

También en forma análoga a la función escala, ésta se puede representar como una combinación lineal de espacios V_j . Por esto, representaremos ahora la función wavelet pero trasladada:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq t \leq k + \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } k + \frac{1}{2} \leq t \leq k + 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (12)$$

Por último, para obtener una mejor aproximación, es necesario además escalar la función, y para que la familia generada sea una base ortonormal, debe ser multiplicada por una constante de normalización, que en este caso también es $2^{\frac{j}{2}}$. La función Haar Wavelet $\psi_{j,k}(t)$ queda finalmente:

$$2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t \leq \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

B. Análisis de multi resolución

El análisis multi resolución (MRA) o aproximación multi escala (MSA) consiste en aproximar una función $f(t)$ mediante diferentes niveles de resolución. El MRA puede ser visto como una secuencia de subespacios anidados que satisfacen relaciones de similitud en tiempo/espacio y escala/frecuencia, además de relaciones de completitud y regularidad.

Con lo anterior, la función original puede ser representado como:

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{j \geq 0} g_j(t), \quad (14)$$

donde

$$g_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t), \quad (15)$$

lo que representa el vaivén entre dos niveles sucesivos de resolución. El espacio generado por esta familia de funciones $g_j(t)$ depende de $\psi_{j,k}(t)$, que debe ser elegido dependiendo de la señal a analizar. La expansión es:

$$g_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (16)$$

Como ya sabemos, los subespacios W_j y V_j son ortogonales y forman una base para V_{j+1} . Gráficamente esto se ve como en la Fig. 1.

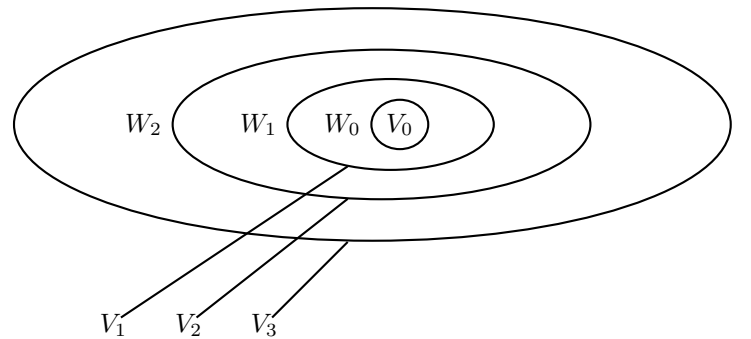


Fig. 1. Espacios Wavelets

C. Transformada de Wavelet

La primera transformada que veremos es la Transformada Discreta Wavelet, que obtiene una descomposición de la señal

original como sigue:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2_0^j-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{K=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad j, k \in \mathbb{Z}^+, \quad (17)$$

donde j_0 indica el espacio en donde se comenzará y 2^N es el número de muestras que se tomó de la señal original. La idea de esta transformada es tomar cierto número finito de muestras de la señal original, luego desarrollar la sumatoria de (17) y luego llevar todo a un sistema del tipo $Ax = b$, donde A es la matriz que contiene los valores de la función escala y de la función wavelet, representando las filas cada intervalo de tiempo en que fue dividida $f(t)$, y cada valor de la fila uno de los términos de la sumatoria antes mencionada, b representa los valores de la función en sus respectivas muestras y x el vector con los coeficientes wavelets y escala. Luego debe resolverse para x y así obtener los valores de los coeficientes. Debido al alto costo computacional de esta transformada, es que se llegó a lo que es la Transformada Rápida Wavelet.

Esta transformada utiliza para el cálculo de los coeficientes el algoritmo Banco de Filtros. Este algoritmo lo que hace para descomponer una señal unidimensional es tomar los datos de entrada y pasarlos por dos filtros diferentes, un *low-pass* y un *high-pass*, lo que se conoce como convolución discreta. Una vez hecho esto, se realiza lo que se conoce como decimación o *downsampling*, que es del total de datos tomar sólo la mitad. Para los datos que pasaron por el filtro *low-pass*, se aplica

$$c_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{J,2k} + c_{J,2k+1}), \quad (18)$$

y para los que pasaron por el filtro *high-pass*

$$d_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{J,2k} - c_{J,2k+1}), \quad (19)$$

donde c_J representa los datos originales y J el nivel más alto de resolución.

De lo anterior se puede inferir que del filtro *low-pass* se obtienen los coeficientes escala, que representan la forma general de señal original y los que pasan por el otro el detalle de la señal. Finalmente, el algoritmo entrega lo que se denomina el Vector DWT, cuyas componentes son las “hojas” del árbol que entrega el banco de filtros.

Una vez realizado el análisis (todo el proceso anterior), la idea es poder reconstruir la señal original, proceso conocido como síntesis. En éste lo que se hace primero es un *upsampling*, en el cual se rellena con ceros entre cada coeficiente, ya sea de aproximación (de escala) como de detalle (de wavelet), con el fin de aumentar al doble la longitud del vector de datos. Luego, los coeficientes de aproximación pasan por el filtro *low-pass* y los de detalle por el de *high-pass*,

$$c_{J,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{J-1,k} + d_{J-1,k}) \quad (20)$$

y

$$d_{J,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{J-1,k} - d_{J-1,k}), \quad (21)$$

lo que hace que se reconstruya la señal original.

Importante es notar que ambos procesos, análisis y síntesis, son iterativos, por lo que en teoría podrían ser aplicados infinitamente (en la práctica eso no puede ser cierto ya que va llegar un momento en que no podrá seguir decimando).

V. DISEÑO DE WAVELETS BASADO EN EL ESQUEMA LIFTING

Si bien las familias de wavelets estándares satisfacen de buena manera el análisis de señales, siempre es bueno poder contar con herramientas que permitan el diseño de otras transformadas que se adapten de mejor manera a una señal en particular objeto de estudio. Además, de ahora en adelante se trabajará con wavelets biortogonales, los cuales permiten una mayor flexibilidad a la hora del diseño. Entre sus propiedades, se encuentra el hecho que los filtros a utilizar no necesariamente son del mismo tamaño, lo que permite que los parámetros estén reparticionados para encontrarse con el diseño específico. Los coeficientes son:

$$c_j(k) = \sum_m h(2k - m) c_{j+1}(m) \quad (22)$$

y

$$d_j(k) = \sum_m g(2k - m) c_{j+1}(m). \quad (23)$$

Ha sido demostrado que cualquier conjunto de funciones wavelets y escalas, incluyendo los asociados con bases biortogonales, pueden ser descompuestas en términos de la estructura *lifting*, el cual es un tipo de reticulado del banco de filtros.

El esquema del *lifting* se divide principalmente en tres pasos:

- Dividir.
- Predecir.
- Actualizar.

La señal bajo análisis c_{j+1} es dividida en componentes pares e impares, $c_{j+1}(2k)$ y $c_{j+1}(2k + 1)$, de manera análoga a lo que es el estándar banco de filtros. Luego, un filtro p , de orden N_p , es usado para predecir los componentes impares de la señal a partir de una combinación de los pares. Los coeficientes wavelet pueden ser identificados como el detalle en los datos de más alta resolución que no son predecidos por el componente par de la señal:

$$d_j(k) = c_{j+1} - \sum_m p(m) c_{j+1}(2m - k - n_0), \quad (24)$$

donde $n_0 = (N_p - 2)/2$ es un corrimiento temporal para la correcta alineación de los coeficientes wavelets de acuerdo a la predicción del orden del filtro. De (23) y (24), g es expresado en términos de p :

$$g(2k) = -p(k), \quad g(2k + 1) = \delta(k - n_0), \quad (25)$$

con $k = 0, \dots, N_p - 1$. De las condiciones impuestas por el filtro *high-pass*, $\sum p(k) = 1$, con $N_p - 1$ grados de libertad.

El siguiente paso, es realizar una actualización de los componentes pares mediante una combinación de los detalles

para poder obtener una aproximación de la señal original. Esta operación utiliza un filtro μ de orden N_μ :

$$c_j(k) = c_{j+1}(2k) + \sum_m \mu(m) d_j(m+k-n_1), \quad (26)$$

donde $n_1 = (N_p + N_\mu + 2)/2$ provee el correcto corrimiento temporal para alinear los coeficientes de acuerdo a las órdenes y predicciones del filtro. De (22) y (26) podemos obtener h :

$$h(2k) = \delta(k - n_1) - \sum_m p(m) \mu(n - m) \quad (27)$$

y

$$h(2k+1) = \mu(k). \quad (28)$$

Para este filtro, existen $N_{df} = N_p + N_\mu - 2$ grados de libertad. Para esta cantidad de parámetros libres existen muchas alternativas dentro del paradigma del *lifting*. Una de estas alternativas es suprimir todos los polinomios de grado menos a $N_p - 1$ de la salida de g y pasar todos los polinomios de grado N_μ a través de h . Esto hace que el coeficiente de aproximación se haga mucho más suave mientras que se habilita el coeficiente detalle para representar información del filtro *high-pass*. Este procedimiento se conoce como el Wavelet Cohen Daubechies Faveau (CDF).

VI. CARACTERÍSTICAS DEL WAVELETS

La idea de este trabajo es mostrar como se puede diseñar un wavelet mediante el esquema del *lifting* vía algoritmos genéticos empleando una función costo relacionada directamente con la clasificación del problema. La implementación vía Algoritmos Genéticos es aplicable tanto a las características del wavelet como al clasificador. Se utilizarán características basadas en los momentos de los coeficientes normalizados. El coeficiente detalle queda de la siguiente manera:

$$w_j(k) = \frac{d_j^2(k)}{z_j} \quad z_j = \sum_k d_j^2(k). \quad (29)$$

La señal w_j está definida para satisfacer la condición necesaria de una función de probabilidad total. El momento acerca de lo que significa w_j está dado por:

$$m_{rj} = \sum_k (k - m_{1j})^r w_j(k) \quad m_{1j} = \sum_k k w_j(k). \quad (30)$$

El conjunto de características usadas están compuestas de la varianza (anchura), *skewness* (asimetría) y *curtosis* (*peakedness*) de w_j .

Si se considera L niveles de wavelets, las características basadas en momentos van más allá de un vector de características $3L$ -dimensional. La distribución de este vector de características está dada por un vector de cuantización (VQ), entrenado usando el algoritmo *k-means* con las características mapeadas al correspondiente vecino más cercano del (entero) elemento *codebook*. Un clasificador basado VQ está diseñado para cada estado, que son empleados en un modelo oculto de Markov.

Dado los estados objetivos S_m , $m = 1, \dots, M$, primero se define un VQ *codebook* usando los vectores características originados en todos los estados. Los estados características del estado S_m son usados para definir una función de probabilidad total para los elementos *codebook* $p(Q(v) = k | S_m)$.

VII. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS GENÉTICOS

Los Algoritmos Genéticos constituyen una técnica de optimización basada en el paradigma de “supervivencia del más fuerte”, encontrado en la naturaleza. Los algoritmos genéticos trabajan con una representación abstracta llamada cromosomas. Un lenguaje clasificador describe la arquitectura del clasificador. El diccionario de palabras para el lenguaje, o léxico, define los componentes, subcomponentes y parámetros numéricos necesarios para construir un clasificador basado en wavelets. La gramática del lenguaje define como estas piezas son conectadas a la vez. El diseño de un clasificador recién generado debería estar gramaticalmente correcto para que el sistema sea válido.

El vector de características v es clasificado como una asociación con el estado S_m si $p(v|S_m) > p(v|S_k)$, $\forall k \neq m$ (discriminación de máxima probabilidad). La meta es diseñar diferentes filtros de wavelets para cada estado S_m , tal que la probabilidad de clasificar formas de ondas dispersas con el estado correcto sea máxima. Para este caso, la función costo empleada en el GA maximiza la mínima probabilidad de la clasificación correcta a lo largo de la diagonal de la matriz de confusión.

Una vez definida la gramática con su respectivo léxico, se van formando los cromosomas, cada uno con su clasificador. Un cromosoma puede ser visto como un árbol, en donde su nodo padre representa el clasificador, y de ahí hacia abajo se va generando una estructura definida por la gramática, en donde se encuentra, por ejemplo, el vector cuantización y un extractor de características.

Una vez generados los cromosomas, llamados padres, se van criando de a pares, en un proceso llamado *crossover*. En este proceso se toman dos nodos de diferentes árboles que posean el mismo tipo gramatical y se intercambian junto con sus subárboles de cromosomas para formar un cromosoma hijo. Una de las restricciones que se le da al GA es que no considere los nodos hojas, ya que sólo se intercambiarán estos quedando muy parecidos al padre, lo que no aporta en demasía. Además, se pueden ir agregando otras restricciones para que el *crossover* funcione de la mejor manera, como el evitar que intercambie subárboles idénticos.

Además, para algunos pocos parámetros se realiza por cada generación una mutación, con la idea de conocer el comportamiento de wavelet ante ciertos cambios en los parámetros de entrada.

VIII. CONCLUSIÓN

Dentro de este estudio se puede decir que la Transformada de Wavelets no es mejor que la de Fourier, sólo está diseñada para abarcar otro tipo de problemas. Este otro tipo de problemas es bastante amplio, gracias a la capacidad de generar de un mismo wavelet diferentes familias de funciones. Otra cosa a destacar es que al tener dos tipos de funciones, una de escalamiento y otra de traslación, hace mucho más fácil la representación, ya que la primera sólo se encarga de la forma general, mientras que la otra del detalle de la señal.

Finalmente cabe destacar que el diseño de wavelet es un libro abierto, pues con sólo una pequeña pincelada, se puede dar

cuenta que existen muchos tipos de wavelet, por lo que es sólo cuestión de dedicación para crear uno propio para alguna señal en particular que se desee estudiar. Es cosa de ver cuantos wavelets se pueden diseñar mediante algoritmos genéticos y ya se pierde la cuenta.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Jones, P. Runkle, N. Dasgupta, L. Couchman y L. Carin. "Genetic Algorithm Wavelet Design for Signal Clasification". *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Inteligence*, vol. 23, pp. 890-895, Ago. 2001.
- [2] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms* New York: Addison-Wesley, 1989
- [3] P. Faundez y A. Fuentes. *Procesamiento Digital de Señales Acústicas utilizando Wavelets*. Instituto de Matemáticas, UACH.
- [4] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press.
- [5] E. Hernández y G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. CRC Press LLC.



Luis Arévalo es actualmente estudiante de la carrera de Ingeniería Civil Informática de la Universidad Técnica Federico Santa María. Pertenece al área de Métodos y Modelos Cuantitativos, desarrollándose como ayudante del ramo Computación Científica y es parte integrante del proyecto *Grid Computing*. Además, realiza trabajos como *sysadmins*.